中学校・高等学校間の数学学習の円滑な接続のための橋渡しとしての学び直し学習指導の実践と成果

―高等学校数学Ⅰ「２次関数とグラフ」における指導実践例―

教職実践開発専攻　　川　地　晃　正

１．学校段階間の「橋渡しとしての学び直しの学習指導」

現在、多くの高等学校で行なわれている「学び直し学習」とは中学校までの学習内容を基礎的・基本的な知識・技能と捉え、その内容を復習的に確実に定着させる指導となっている。分数計算であったり、１次関数の内容であったり、それらは小・中学生が苦手とした様々な分野に及んで行なわれるが、基本的には小・中学校の教科書の内容を超えることはない。そこには、学校段階間のカリキュラムの内容は接しているという考えがある。つまり、中学校までの学習内容が理解できればだれもがスムーズに高等学校での内容に移行できるという考えである（図１）。

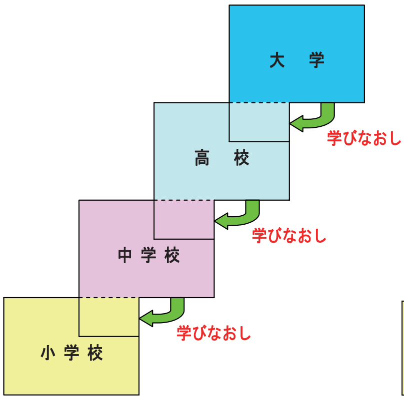


図1　スパイラルを単純な学び直しと捉えたイメージ図

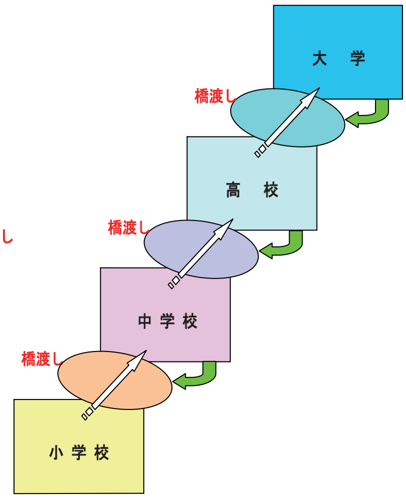


図2　橋渡しとしての学び直しのイメージ図

しかし、中学校までの学習内容を十分理解して高等学校に入学している生徒の中にも、高等学校で数学が苦手となっていく生徒が少なからずいて、数学で挫折する生徒がいることは、必ずしも高等学校の内容にスムーズに入っていけるとは限らないことを物語っている。つまり高等学校の数学の学習内容が系統性を重視して構成されているとはいえ、中学校の数学の学習内容との接続部分で十分な配慮がなされていないのではないかと考える。このことから中学校（義務教育）の学習内容から飛躍的に発展する高等学校の学習内容を見渡したとき、校種間の内容は決して接している訳ではなく、むしろ（図２）の様に離れていると考えるのが妥当だといえる。以上のことから校種間の学習内容や指導方法にはギャップがあり、このギャップを埋めるための「橋渡し」が必要ではないかと考えるものである。

学校段階間の円滑な接続　→　学校段階間の橋渡しとしての学び直し

「学び直し」を単に基礎・基本のくりかえしと考えるのではなく、中学校から高等学校への学習内容のきめ細かな橋渡しを工夫し発展させることで、学校段階間の円滑な接続を図る

校種間の「接続」とはこの部分の橋渡し役となる内容を与える、つまり中学校（義務教育）段階の内容を意識させ、それを踏まえて高等学校の学習内容につながる内容や指導の工夫（橋渡し）をする。このことが円滑な接続に結びつく学び直しで、中→高に限らず、小→中、高→大にも同様なことが言える。逆に前学校

段階では、次の学校段階で学ぶ内容を意識した橋渡し的な内容の取扱も必要なことと考える。

2．高等学校数学Ⅰ「２次関数とグラフ」の指導について

基本的な２次関数である $y=ax^2$については、中学校で既習済みである。高等学校では一般の２次関数 $y=ax^2+bx+c$へと内容が発展していく。放物線の頂点はいつも原点にあるものと思い込んでいる生徒にとって、座標平面上の任意の点に頂点が移っていく様は驚きである。ここで２次関数の一般化という内容を学ぶ。従来の指導では、y 軸方向、x 軸方向に分け、関数対応表を用いて帰納的に値の変化を知り、式変形を学んでいくという方法が多くなされている。しかし、$y=ax^2+bx+c$ を $y=a(x-p)^2+q$ と式変形したとき、平行移動を表す量の p、q につく符号がそれぞれ異なっていることが、高校生にとって理解を困難なものにしている。符合の違いに疑問を感じながらも「こういうものなんだ」と式の暗記で済ます生徒が大半いるのも事実である。ここでは数学Ⅱ以降で学ぶ種々の関数の平行移動につなげるためにも、暗記ではなく、グラフの平行移動と式の関係を原理から理解させたい。そこで中学校の既習事項（比例・１次関数）の学び直しに発展的な内容を橋渡しとして与える指導法を考え、実践に取り組んだ。

3．「y 軸移動の放物線・x 軸移動の放物線となる２次関数」の計画

(1) 従来の指導方法

y 軸方向への平行移動

$y=2x^2$ と $y=2x^2+3$ の関係を考える

x	…	-2	-1	0	1	2	…
$2x^2$	…	8	2	0	2	8	…
$2x^2+3$	…	11	5	3	5	11	…

対応表から $y=2x^2+3$ の値は $y=2x^2$ の値より３大きいことに気づく。

グラフを描き、y 軸の正の向きに３だけ移動させたものであることを帰納的に知る。

$y=ax^2+q$ のグラフは $y=ax^2$ のグラフを y 軸の正の向きに q だけ平行移動させたものである

この符号の違いに生徒は混乱する

x 軸方向への平行移動

$y=2x^2$ と $y=2(x-3)^2$ の関係を考える

x	…	-2	-1	0	1	2	3	4	…
$2x^2$	…	8	2	0	2	8	18	32	…
$2(x-3)^2$	…	50	32	18	8	2	0	2	…

対応表から $y=2(x-3)^2$ の値は $y=2x^2$ の値を３だけ右にずらした値と一致することに気づく。

グラフを描き、x 軸の正の向きに３だけ移動させたものであることを帰納的に知る。

$y=a(x-p)^2$ のグラフは $y=ax^2$ のグラフを x 軸の正の向きに p だけ平行移動させたものである

(2) 従来の指導方法の問題点

・$y=ax^2+q$ のグラフを考えるにあたって、先に対応表が与えられてしまう。このことが既習事項との関連で考えようとする動機を奪っている。同様に $y=a(x-p)^2$の形が現れることに必然性がない。$y=2x^2$ と $y=2(x-3)^2$の関係を帰納的に考えるが、生徒にとって $y=2(x-3)^2$が生じる動機がない。

・帰納的に得た事項の根拠を考えることがない。したがって、$y=ax^2+q$ と $y=a(x-p)^2$の p と q についている符号が異なることに混乱するが、理論的に解決し得ない。

・y 軸方向の平行移動は中学校で既習であるが、x 軸方向の平行移動は既習ではない。したがって２つを同列に扱うことに無理があり、ここに大きな内容の飛躍がある。

⑶　既習事項の学び直しに発展的な内容を橋渡しとして与える指導法

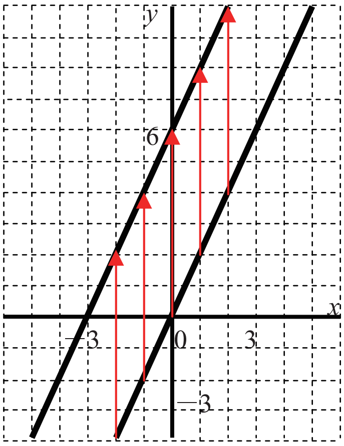
ここでは、平行移動の原理と、式との関係について理解させたい。

中学校の比例と１次関数の関係を発展的に捉える

同様なことを生徒達は中学２年生で経験していることに着目した。

中学校数学　第２学年　「１次関数」より

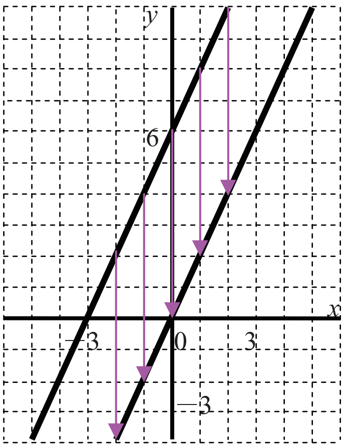
○　$y=2x+6$ のグラフと $y=2x$ のグラフの関係



$y=2x+6$ のグラフは $y=2x$ のグラフを y 軸方向に $+6$ だけ平行移動したものである。

基本にあるのが中学校１年生で既習の「比例」である。１次関数であらわされるいろいろなグラフをかくと必ずしも直線は原点を通らない。このことを原点を通る比例のグラフを基にして考え、「y 軸の正の向き（負の向き）に平行移動」されたものとみる。これにより、比例が１次関数の特殊な場合とみることができ、１次関数が一般化されるということを学ぶ。

しかしこのままでは平行移動の一般原理へと発展していかない。そこで式変形の根拠として $(y-6)=2x$、すなわち x と $y-6$ が比例になる（原点を通る）という数学的見方を示した。

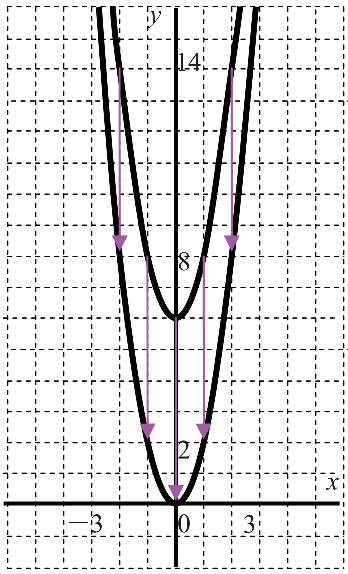


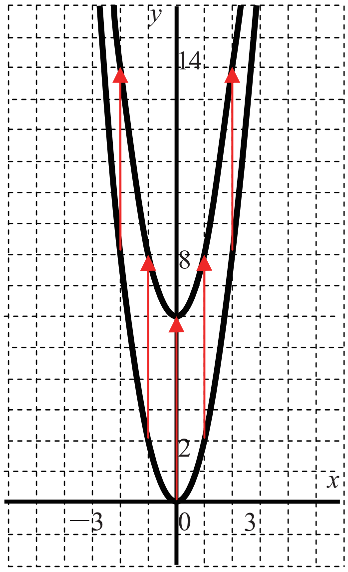
式の見方が橋渡し
この様に中学校の内容にプラスアルファのエッセンスを与える

その根拠は？
$(y-6)=2x$ は y 座標から６を引けば比例関係 $y=2x$ が成り立つことを示している。逆に言うと $y=2x$ の各々の点の y 座標に $+6$ をすれば
$y-6=2x$　→　$y=2x+6$ となる

この「数学的な見方」が、２次関数の y 軸方向への平行移動はもとより、x 軸方向への平行移動を考える根拠となっていく。

○　$y=2x^2+6$ のグラフと $y=2x^2$ のグラフの関係にも同様なことが言える





1 次関数を式変形により比例とみなすことと同様なことが起きている

$(y-6)=2x^2$ は y 座標から 6 引いたもので $y=2x^2$ が成り立つことを示している。逆に言うと $y=2x^2$ の各々の点の y 座標に 6 を足せば
$(y-6)=2x^2$
→　$y=2x^2+6$ となる

一般に　$y=ax^2+q$ のグラフは $y=ax^2$ のグラフを y 軸方向に q だけ平行移動したものである。

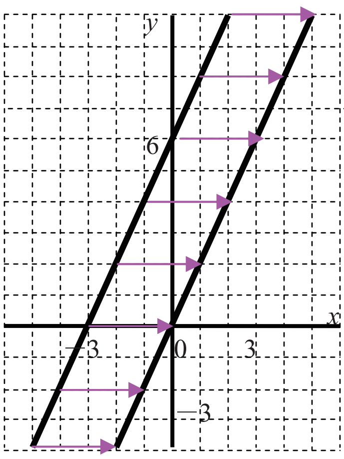
これで、2 次関数の y 軸方向への平行移動に根拠を与えたことになる。

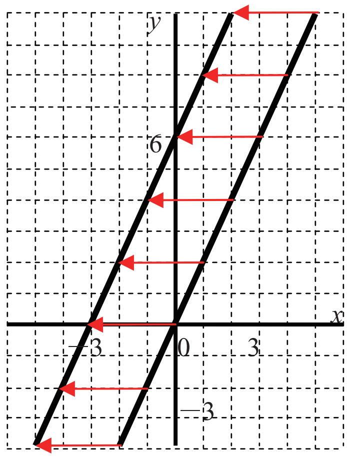
次に x 軸方向への平行移動を考える。しかし、中学校では y 軸方向への平行移動については扱っているが、x 軸方向への平行移動は扱っていない。しかし先の「比例と 1 次関数の関係」が x 軸方向の平行移動でも考えることができることを示す。

$y=2x+6$ は $y=2(x+3)$ と式変形できる

この式変形がポイント
x 軸方向への平行移動も中学校での既習事項を基に考えることが橋渡しとなる

○　$y=2(x+3)$ のグラフと $y=2x$ のグラフ



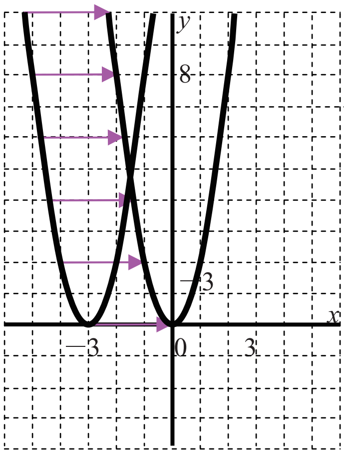


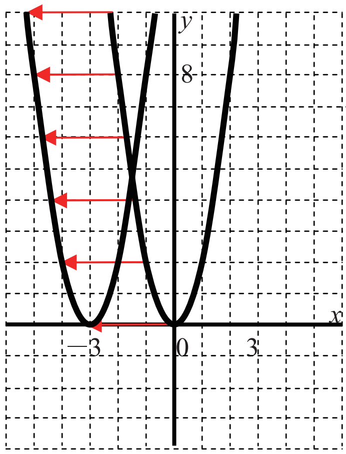
y 軸平行移動で考えた根拠から
$y=2(x+3)$ は x 座標に 3 を足せば比例関係 $y=2x$ が成り立つことを示している。

逆に言うと $y=2x$ の各々の点の x 座標から 3 引けば
$y=2(x+3)$　→　$y=2x+6$ となる

$y=2(x+3)$ のグラフは $y=2x$ のグラフを x 軸方向に -3 だけ平行移動したものである。

○　$y=2(x+3)^2$ のグラフと $y=2x^2$ のグラフの関係にも同様なことが言える





x 座標に 3 たしたもので $y=2x^2$ が成り立つことを示している。逆に言うと $y=2x^2$ の各々の点の x 座標から 3 を引けば $y=2(x+3)^2$ となる

一般に　$y=a(x-p)^2$ のグラフは $y=ax^2$ のグラフを x 軸方向に p だけ平行移動したものである。

これで、2 次関数の x 軸方向への平行移動に根拠を与えたことになる。

4．授業記録

(1)　課題の提示と動機の獲得

課題Ⅰ「$y=2x^2+6$のグラフと $y=2x^2$のグラフの関係を考えよう」を提示し、「似たようなものを中学校で習っている。何があるだろう？」と尋ねた。すると「1 次関数と比例の関係！」という答えがあっさり出てきた。ここで既習の $y=2x+6$（1 次関数）のグラフと $y=2x$（比例）のグラフの関係を考え（学び直し）、それを基に $y=2x^2+6$のグラフと $y=2x^2$のグラフの関係を考えるという動機付けができた。

(2)　$y=2x+6$（1次関数）のグラフと $y=2x$（比例）の関係

$y=2x+6$のグラフと $y=2x$ のグラフをノートに書かせた後、「$y=2x+6$のグラフと $y=2x$ のグラフはどういう関係にあるか？」との質問に対して、「$y=2x+6$のグラフは $y=2x$ のグラフを y 軸方向に 6 だけ平行移動したものです」という答えはすぐに返ってきた。次に黒板で $y=2x+6$を $(y-6)=2x$ と式変形をして、$(y-6)=2x$ の式の見方について尋ねた。

教師　「$y=2x+6$を $(y-6)=2x$ と式変形しました。変形した式で、どれかの数量をうまく団体扱いすると、この式の持つ意味が見えてきます。それは何でしょうか？」
生徒　「・・・」
教師　「隣どうしで意見の交流をしてみよう。」
・・・
（交流の中で何と何が比例かというヒントを与えた）
・・・
生徒A「x と $y-6$が比例になっていると思います。」

教師　「そうですね。$y-6$を団体扱いすると比例になっているということはどういう事なのかさらに考えてみましょう。」

生徒B「グラフで$y=2x+6$のy座標から6を引いたら$y=2x$に重なるということを表していると思います。」

教師　「出てきた意見をまとめてみましょう。」

$$\begin{tikzcd}(y-6)=2x \arrow[r, bend left, "y\text{座標}-6"] & y=2x \arrow[l, bend left, "y\text{座標}+6"]\end{tikzcd}$$

1次関数と比例の関係をもとに、式変形とその見方から平行移動の基本原理を導くことができた。

(3) $y=2x^2+6$のグラフと$y=2x^2$のグラフの関係

1次関数と比例の関係を示した根拠は、そのまま一般の2次関数のグラフと頂点が原点である2次関数のグラフの関係に適用できる。

$$\begin{tikzcd}(y-6)=2x \arrow[r, bend left, "y\text{座標}-6"] & y=2x \arrow[l, bend left, "y\text{座標}+6"] & \Rightarrow & (y-6)=2x^2 \arrow[r, bend left, "y\text{座標}-6"] & y=2x^2 \arrow[l, bend left, "y\text{座標}+6"]\end{tikzcd}$$

この図を示し、生徒はすんなりと$y=2x^2+6$のグラフをかくことが出来た。さらにかかれたグラフについて、対応表をもとに点を取ったグラフと一致することを確認した。

(4) x軸方向への平行移動

課題Ⅱ「$y=2(x+3)^2$のグラフと$y=2x^2$のグラフの関係を考えよう」を提示した。この課題を考えるにあたり、y軸方向への平行移動と同様、$y=2(x+3)$のグラフと$y=2x$のグラフの関係を考えた。

教師　「$y=2x+6$は$y=2(x+3)$と式変形できます。$(y-6)=2x$の式で、$(y-6)$を一つの数量として団体扱いの見方を考えたように、うまく団体扱いすると、この式の比例関係がみえます。何と何が比例でしょうか？」

教師　「隣どうしで意見の交流をしてみよう。」

・・・

(交流)

・・・

しかし、「$x+3$とyが比例関係にある」という見方が、生徒にはなかなか出来なかった。団体扱いという式の見方のヒントを与えたところ、yは$(x+3)$に比例していることが理解でき、それをもとに、

$$\begin{tikzcd}y=2(x+3) \arrow[r, bend left, "x\text{座標}+3"] & y=2x \arrow[l, bend left, "x\text{座標}-3"]\end{tikzcd}$$

という関係まで導いた。中学校で y 軸方向への平行移動しか学習していない（考えていない）生徒にとって、x 軸方向への平行移動を考えることは、発想の転換も伴い、難しいようであった。しかし傾きが等しい直線は任意の平行移動で重なる事実と $(y-6)=2x$ も $y=2(x+3)$ も同じ $y=2x+6$ という式でありながら、式の見方によって図形的に違った変化の様子を物語ることに生徒は驚いた様子であった。小・中学校から重視されている「式を読む」という学習を通して学んだ、「数学的な見方や考え方」を用いて考えればいいということに気付く場面でもあった。

(5) $y=2(x+3)^2$ のグラフと $y=2x^2$ のグラフの関係

x 軸方向への平行移動においても、1次関数と比例の関係を示した根拠は、そのまま一般の2次関数のグラフと頂点が原点である2次関数のグラフの関係に適用できる。

$$\begin{tikzcd} y=2(x+3) \arrow[r, bend left, "x\text{座標}+3"] & y=2x \arrow[l, bend left, "x\text{座標}-3"] \end{tikzcd} \quad \Longrightarrow \quad \begin{tikzcd} y=2(x+3)^2 \arrow[r, bend left, "x\text{座標}+3"] & y=2x^2 \arrow[l, bend left, "x\text{座標}-3"] \end{tikzcd}$$

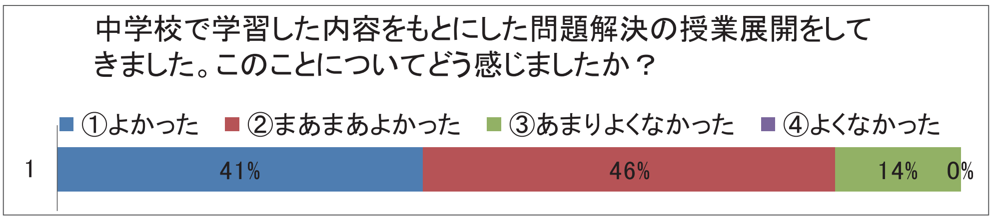
この図を示し、平行移動の原理を理解しながら $y=2(x+3)^2$ のグラフをかくことが出来た。授業の最後に以下の2つをまとめとした。

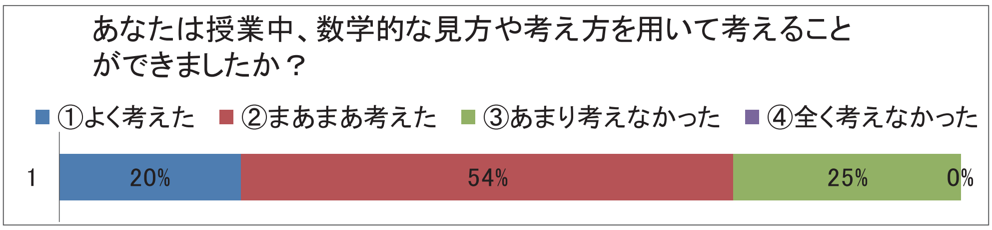
> $y=ax^2+q$ のグラフは $y=ax^2$ のグラフを y 軸方向に q だけ平行移動したものである。頂点は$(0、q)$となる。

> $y=a(x-p)^2$ のグラフは $y=ax^2$ のグラフを x 軸方向に p だけ平行移動したものである。頂点は$(p、0)$となる。軸は $x=0$ から $x=p$ 移る。

5．振り返りシートによる評価

授業後、ビデオカメラ等による生徒の学習の様子の記録、振り返りシートにより評価をおこなった。対象は2クラス80名である。





この結果から、約87パーセントの生徒は、中学校の内容からつながる授業展開に肯定的な考えを持ち、

約74パーセントの生徒がその中で数学的な見方や考え方を用いて考えることが出来たと答えている。以下は生徒が自由記述で書いたものである。

・中学校で勉強したことがつながっていてやる気が出た。
・中学校でやったことを思い出しながらやって分かりやすかったし、しっかりと理解ができた。
・もし中学校とは全く違う内容から始まっていたら、きっとついて行けなかったと思うので元々ある知識から考えることが出来たからよかった。
・中学校での学習を生かして出来た。

6．実践を振り返って

今回の実践で学び直しの部分は「比例と１次関数の関係を y 軸方向への平行移動でみる」ことであった。しかし、授業の導入で、本日の学習課題が中学校で習った「比例と１次関数の関係に似ている」ということが生徒の口から素直に出てきたことは、その「学び直し」の部分はわずかな時間でほぼ完了していることが分かる。そのことは中学校での学習が丁寧に行われていて、生徒の頭の中に残っていることの現れと感じた。したがって、高等学校ではそれを無駄にしないためにも小学校、中学校の既習事項を常に意識しながら授業を行うことが大切であると感じた。そしてそれは２次関数の y 軸方向への平行移動に応用されて生徒は高等学校の学習内容の一つを理解した。

問題は x 軸方向への平行移動にあった。中学校の内容にもない、高等学校の内容にもない、「比例と１次関数の関係を x 軸方向への平行移動で見る」という「橋渡し」を与えた。そこで生徒はかなり戸惑った。ここに内容のギャップが如何に大きいかが見えた。数学的な見方や考え方を促す発問をすることで、生徒たちは自ら x 軸方向への考えを発見し、その考えを２次関数へと応用していった。このことにより平行移動の考え方をその根拠から理解するに至った。

もし「橋渡し」がなかったら、従来通り与えられたものを“帰納的に「知る」”に留まっていたであろう。このようにただ単に小学校、中学校の内容の学び直しにとどまることなく、それを高等学校の内容に引き上げる（橋渡す）ことが、生徒の感想にある「中学校での学習を生かす」ことになるということを改めて実感できる授業であった。

7．結果と考察

⑴　学習内容の接続

高等学校の学習内容はその分野・領域から言っても中学校の内容からの接続を考えて構成されている。しかし、生徒にとって難しいと感じる部分を拾い上げると、ところどころで内容的に飛躍している部分がある。これらは接続に関する学習内容の問題であると考えることができる。それをクリアーするためには「橋渡しとしての学び直しの学習指導」が有効であることが分かった。

生徒の前学校段階の学習内容の理解レベルによって、学び直しを行うことの必要性やその比重は大きく変わる。十分に戻って復習する必要がある場合もあれば、簡単な確認ですむ場合もある。しかし簡単な確認ですむ（学び直しがほぼできている）場合であっても、実践例のように、高等学校の学習内容の前には大きなギャップが待ち受けているということである。ギャップに跳ね返されないためにも、学び直しの内容を橋渡しの内容を含んだものとして発展させることが必要である。

⑵　時間的問題の解決

「学び直し」を行うにあたって、時間的な問題がある。例えば標準単位数で高等学校数学Ⅰを教える場合、数学Ⅰの内容を教えきるには時間的な余裕はほとんど無い。つまり「学び直し」に時間をとる余裕は無く、逆に中学校の内容の復習に十分な時間をとると、高等学校数学Ⅰが終わらない可能性が出てきてしまう。したがって授業の主体者である教師は「学び直し」をさせながら常に高等学校の内容を進めることを考えなく

てはならない。校種間の接続がスムーズに行なわれない大きな問題に前学校段階での学習内容の理解不足があるが、ここでは学校段階間の学習内容のギャップを問題に取り上げた。先に述べたように生徒の理解度によって復習部分にかける比重は変わるが、ある程度復習（確認）ができたら橋渡し部分に生徒を乗せて高等学校の数学へと進める必要がある。少なくとも高校生は高等学校の学習をしたいと思っている。発展した高等学校の学習内容に触れることは動機にもつながる。そうすることによって「橋渡し」が「学び直し」に留めることをしないので、高等学校数学Ⅰの内容は進む。これにより「学び直し」による時間的問題は解決される。

⑶　基礎的・基本的な知識・技能の習得と思考力・判断力・表現力等の育成の両立

「橋渡しとしての学び直しの学習指導」は基礎的・基本的な知識・技能の習得を思考力・判断力・表現力等の育成へとつなぐ橋渡しでもあることが分かった。

本指導実践では、「学び直し」が問題解決的な学習活動に発展し、高等学校の学習内容に接続した。そこでは既習の数学的な見方や考え方を用いて、より高度な「数学的な思考・判断・表現」への気付きや、実感を伴うこととなった。ここに「橋渡しとしての学び直し学習指導」のポイントがある。したがって、「橋渡しとしての学び直しの学習指導」では、既習の基礎的・基本的な知識・技能の確実な習得とともに、新たな数学的な見方や考え方へと発展するような思考活動（数学的活動）を活発化させることが必要である。そのためには生徒が既習の数学的な見方や思考の方法を適切に気付いたり、より統合的にみたりすることができるような学習指導が大切と考える。また学力の３つの要素のもう一つ、「学習意欲」についてはこの2つの要素の土台として必要なことは、本実践で明らかにされた。

⑷　開発内容の普及

本開発内容を普及していく為には、どの学習内容で「橋渡す」必要があるのかを、小・中学校の学習内容と高等学校の学習内容を比べて、細かく分析をしていく必要がある。先にも述べたが生徒にとって難しいと感じる学習内容にギャップが存在している。そこに橋渡しの必要性が存在している。そのためにはつまずき分析等を行なうことが有効であろう。このことについては先行研究が多数ある。岐阜県教育委員会学校支援課では施策として、つまずき解消委員会（平成13年度～平成15年度）にて分析を行い、学力向上プラン数学つまずき解消補助教材（高等学校）にまとめている。また、岐阜県高等学校教育課程講習会や、岐阜県高等学校数学教育研究会研究発表大会で、つまずきについての発表が多くある。これらを活用していきたいと考える。また高等学校数学は来年度から新学習指導要領が実施される。先行研究に加えて新学習指導要領でのつまずきの動向も調査していく必要があろう。

参考文献

『高等学校学習指導要領解説 数学編理数編』（2009）　文部科学省
『新版　分数ができない大学生』岡部恒治・戸瀬信之・西村和雄編（2010）ちくま文庫
『数学科授業と理論の実践』岩崎秀樹編著（2010）ミネルヴァ書房
『平成21年度数学教育研究集録』岐阜県高等学校教育研究会数学部会平成22年３月発行
『時代は動く！どうする算数・数学教育』汐見稔幸　井上正允　小寺隆幸編（1999）国土社
『授業改造』広岡亮蔵著（1964）明治図書出版
「小学校、中学校、高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善について（答申）」中央教育審議会（2008）
『学力低下と新指導要領』西村和雄編（2001）岩波ブックレット
『教育の過程』J.S ブルーナー著　鈴木祥蔵・佐藤三郎訳（1960）岩波書店
『ブルーナー理論と授業改善』佐藤三郎著（1972）明治図書

『基礎学力を問う21世紀日本の教育への展望』東京大学学校教育高度化センター編（2009）東京大学出版会
『思考と言語』ヴィゴツキー著　柴田義松（新訳）（1934）新読書社
『ヴィゴツキー入門』柴田義松著（2006）寺小屋新書
『数学的な考え方の具体化と指導』片桐重男著（2009）明治図書