数学学習における抽象的例示の転移優位性について

纐纈　将博　多治見市立北栄小学校
月元　敬　岐阜大学

On a transfer advantage of abstract examples in learning mathematics

Masahiro KOKETSU (*Gifu Tajimi Hokuei Elementary School*)
Takashi TSUKIMOTO (*Gifu University*)

近年の数学教育研究において，学習の転移には，具体例よりも抽象例の方が有効であることが示されている。本研究では「イラストの有無」と「循環的構造の恣意性の有無」の違いによる転移の生じやすさを検討した。また，正答数の他に転移の生じやすさを表す指標として，転移が生じるまでの反応時間を測定した。実験 1 では，実験参加者は学習段階で例題を 2 つ解いた後，転移テストを受けた。その結果，イラストの有無と恣意性の有無のいずれも正答数と反応時間に有意な差が認められなかった。実験 2 では，実験 1 の学習段階の例題を 1 つ減らしたこと以外，手続きは同じであった。その結果，イラストがない方がイラストがある場合よりも，転移テストの正答数が高くなったが，反応時間に違いは認められなかった。これらの結果は，イラストは記号よりも情報量が多いため，背後の数学的構造を認識あるいは展開しづらくする可能性を示している。

Key words: transfer of learning, concrete example, abstract example, arbitrariness

令和元年度の学力状況調査の報告書 (国立教育政策研究所, 2019) において，中学校数学の分野では，基礎的な計算・概念理解に関しては改善の傾向があるが，式変形の目的，問題解決をするための概念・法則の利用と説明に課題があると指摘されている。また，学習指導要領 (文部科学省, 2017, 2018) では，中学校・高等学校の数学教育において醸成すべきものとして「数学的見方」と「数学的考え方」を挙げている。数学的見方は「概念等に着目して，その特徴や本質を捉えること」，数学的考え方は「既習の知識及び技能を関連づけ統合的・発展的に考察すること」と定義されている。これらの用語を用いるならば，学力状況調査の報告書は，数学的見方よりもむしろ数学的考え方の習得をいかに促すかが，今後の数学教育における課題であるということができる。

学習指導要領では，数学的考え方に限らず，「統合的・発展的」という表現がしばしば用いられている。例えば，中学校・高等学校における数学教育の目標の 1 つとして「事象の本質や他の事象との関係を認識して統合的・発展的に考察する力」を掲げている (文部科学省, 2017, 2018)。統合・発展のためには，事象間の関係や共通性あるいは構造を抽出する必要がある。これは，抽象化 (abstraction) と呼ばれる思考過程である。言い換えれば，文章題などの設問において表面的な内容が異なっていても，以前に取り組んだ問題との構造的類似性に気づいたり，問題の設定から背後の構造を見抜いてどの知識を関連づけるべきかを判断したりする過程である。この意味で，数学教育において習得が期待されるのは，「学習の転移 (transfer of learning)」であると言える。学習したことを他の学習あるいは新たな課題に効率的に利用・援用できるようになることが「統合的・発展的」であり，「転移」である。したがって，数学的考え方の習得という数学教育の課題は，学習の転移を促すため

の方法論にアプローチしていく必要がある。

これに関わる動向として近年,「教科書でのイラスト利用」への関心が高まっている。金田 (2012) は, 日本に比べてフィンランドの教科書ではイラストの量が豊富でかつその種類も多様であると述べている。この比較は小学校教科書に留まっているものの，多様なイラストにより，得られた情報を適切に理解して問題解決を図る能力や，数学的な知識が様々な場面で使用できるという応用可能性の理解につながると推察している。

また，教科書にはイラストだけでなく写真も用いられているが, 平成 14 年から全ての教科書が全ページカラー印刷となった (吉田,2016)。そのため，イラストやグラフなど，線種ではなく色で区別できるようになり，美しく例示され，内容が理解しやすくなった (現在の教科書は色弱の児童・生徒への配慮からカラーユニバーサルデザインに基づいて制作されている)。この点で，印刷技術やユニバーサルデザインは，イラストや写真による具体的例示に拍車を掛けていると言える。

このように，日本の教科書のイラストが充実していく一方，数学教育に関する海外の研究ではイラストの利用が必ずしも良い効果をもたらすとは限らないことが示されてきている。

Kaminski, Sloutsky, & Heckler (2005) は, 群論 (group theory) の剰余演算 (modulo) を扱った問題において, 学習段階で具体的な例示 (計量カップに入っている水) と抽象的な例示 (記号) の違い及び記号や具体的な例示の色などの知覚情報の多さの違いが，学習のしやすさや転移のしやすさに影響するのか検討した。より具体的には，Table 1 に示すような要素とそれについての演算規則の例から，他の組み合わせについて変換を行うとどのような結果となるかを判断する課題を用いた実験であった。その結果，具体的例示は抽象的例示よりも学習されやすい反面，学習の転移の生じやすさを妨げた。さらに，知覚情報が少ない例示の方が多い例示よりも転移が生じやすいことが明らかになった (具体例によって抽象的な考え方の学習が妨げられる可能性を指摘しているレビューとして，Brown, McNeil, & Glenberg , 2009)。

Table 1

Kaminski et al. (2005) が用いた具体例と抽象例

	具体的例示		抽象的例示	
要素			● ♦ 	
演算規則	結合要素	結果	結合要素	結果
			● ●	♦
			♦ ♦	●
			● ♦	

注：実験の設定では，とは単位元 (identity) として扱われている。

De Bock, Deprez, Van Dooren, Roelens, & Verschaffel (2011) は, Kaminski et al. (2005) の実験手続きに対し, ①例示が具体的か抽象的かという以外にイラストで示されたものに対する操作性の分かりやすさの違いが交絡しており，それにより転移において不公平が生じていること，②学習における抽象的例示から実験参加者は一体何を実際に学び取ったのかということの 2 つの批判点を指摘した。その上で，De Bock et al.は Kaminski et al.と同様の具体例・抽象例を利用し, 転移先の問題に抽象例だけでなく具体例も追加し実験を行ったところ，学習テストは具体的例示の方が抽象的例示よりもパフォーマンスが優れ，さらに転移テストが具体的例示である場合は，学習テストが具体的例示であった方が抽象的例示の場合よりもパフォーマンスが高くなることを示した。このようにテスト得点の側面で見れば，具体的例示の方が有利であるが，これは具体性が高いことに由来する把握のしやすさによるものと考えられる。しかし，抽象的例示での学習テストを経験した群は，具体的／抽象的例示による転移テスト両方で得点を高めたが, 具体的例示での学習テストを経験した群は，抽象的例示による転移テストで大きく得点を下げた。

この De Bock et al. (2011) の結果は，抽象的例示に対する転移という側面で見れば, Kaminski et al. (2005) の知見と同じである。すなわち，具体例よりも抽象例の方が，抽象例に対して転移が生じやすいということである。この点は，数学の中心的性質が抽象性や形式性，一般性にあること (e.g., MacLane, 1986 赤尾・岡本訳 2019) を踏まえると，先述した数学教育の目標の達成するための方法論的手がかりとして非

常に重要であると思われる。しかしながら，De Bock et al. が指摘しているように，抽象的例示のどのような特徴が転移を生じやすくしているのかは判然としない。

Table 1 に示されているように，具体例として用いられた「計量カップと水の量」は，De Bock et al. (2011) が指摘した通り，操作性の分かりやすさもさることながら，日常的に目にするモノと量的で循環的な変化に対応させられることが直感的に分かるという特徴がある。その意味で，計量カップの絵 (水の量) の循環性には modulo 構造を自然に当てはめることができると思われる。一方，記号の循環は実験における人工的な設定に過ぎない。その意味で，抽象例には「恣意性 (arbitrariness)」がある。しかしながら，Kaminski et al. (2005) や De Bock et al. (2011) を含め，具体例と抽象例の転移を比較する研究 (e.g., Kaminski, 2017; Kaminski, Sloutsky, & Heckles, 2008) において恣意性は全く言及されていない。

したがって，実験で用いられた具体的例示が備えている具体性は，①記号ではなくイラストであるという「表面的な側面」及び②日常的な経験に即した modulo の循環的性質を喚起させるという「非恣意的な側面」という 2 つの側面が分離されていないと考えられる。つまり，具体的例示は「循環的性質が非恣意的なイラスト」であり，逆に，抽象的例示は「循環的性質が恣意的な記号」とみなせるだろう。したがって，表面的な側面と恣意的な側面を分けるならば，「循環的性質が恣意的なイラスト」と「循環的性質が非恣意的な記号」という要素も想定することができるだろう。

そこで本研究は，具体性を持つイラストの有無と恣意性の有無の違いによる転移の生じやすさを検討することを目的とする。

仮説は以下の通りである。第 1 に，記号を例に学習する方がイラストを例に学習するよりも，抽象例による転移テストにおいて正答数が多く，反応時間が短くなるであろう。第 2 に，循環的性質が恣意的である例を学習する方が恣意的でない例を学習するよりも，抽象例による転移テストにおいて正答数が多く，反応時間が短くなるであろう。

実験 1

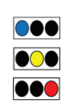
方法

実験参加者　岐阜大学教育学部生 40 名 (男性 14 名，女性 26 名)。平均年齢は 20.73 歳 ($SD = 0.56$)。

実験計画　例示での「イラスト」(2 水準 : あり vs. なし) 及び循環的性質における「恣意性」(2 水準 : あり vs. なし) を独立変数，正答率及び規則性を見抜き解くまでの反応時間を従属変数とする 2 要因参加者間計画。以降，イラストありを I，イラストなしを NI，恣意性ありを A，恣意性なしを NA と略記する。4 つの群 (I-A 群，NI-A 群，I-NA 群，NI-NA 群) にそれぞれ 10 名の実験参加者を無作為に割り当てた。

実験課題　Kaminski (2017) に準拠し，群論の剰余演算 (modulo) を題材とした。各群の操作として用いたイラスト及び記号を Table 2 に示す (I-NA 群と NI-NA 群は恣意性がない条件であり，信号の変化と植物の成長過程に自然な循環が成り立っているのに対し，I-A 群と NI-A 群のイラスト及び記号にはそのような循環が恣意的である)。なお，NI-A 群と NI-NA 群の記号は，イラストを用いる群と対応させるため黒ではなくカラーをつけた。これらのイラスト及び記号を用いて，例題プリント 2 枚及び転移テスト 1 枚を作成した。1 枚目の例題プリントは，3 種のイラストまたは記号について，①全ての組み合わせでの演算規則，②関係性を示した循環図，③modulo 3 の 0，1，2 への対応づけと循環的性質に関するいくつかの例，④演算の練習問題 3 題から構成された。2 枚目の例題プリントは，①3 種のイラストまたは記号の関係性を見つけるために最低限必要となる 4 つの演

Table 2
各群の例題プリントに用いたイラスト及び記号

群	I-A	NI-A	I-NA	NI-NA
1 枚目		○ △ □		青 黄 赤
2 枚目		❖ ⊿ ×		種 花 実

注 : それぞれ最初のイラスト／記号を単位元として扱った。

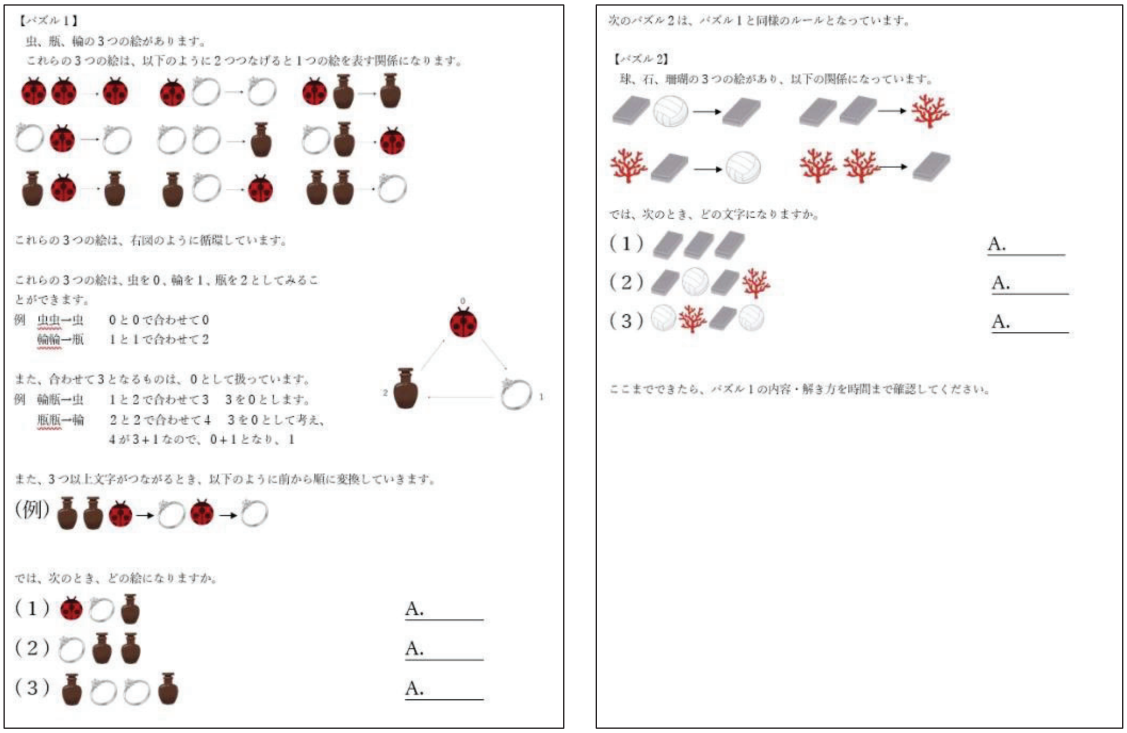


Figure 1. 例題プリントの例 (イラストありかつ恣意性ありの群の場合)。左が 1 枚目，右が 2 枚目。他の群についても同様に，Table 2 のイラストまたは記号を用いて例題プリントを作成した。

算規則，②演算の練習問題 3 題から構成された。例題プリントの一例として，イラストありかつ恣意性ありの群に使用したものを Figure 1 に示す。

全ての群で共通の転移テストは，Kaminski (2017) と同様に，4 種の記号◎，▽，☆，◇の関係性を見つけるために最低限必要となる 5 つの演算規則と設問 10 題から構成された (Table 3)。設問 (1) 〜 (3) は演算規則のみで解くことができる問題，設問 (4) は演算規則から modulo 構造を見出すことで初めて解くことができる問題，設問 (5) 〜 (7) は長さが 4 の記号列の問題，設問は (8) 及び (9) は長さが 5 の記号列の問題，設問 (10) は長さが 6 の記号列の問題であった。

手続き　初めに，実験参加者に参加同意書を配布し，性別，年齢を含む実験データは統計的にのみ利用されること，転移テストの実施の際に手元の撮影を行うことを説明し，実際に撮影される際の撮影用スマートフォンのカメラアングルを確認させた。署名確認後，実験同意書を回収し，1 枚目の例題プリントを配布した。

実験参加者に，パズルは 3 種のイラストまたは記号からできていること，9 つの演算規則があることを例題プリントの該当箇所を指で示しながら教示した。3 種のイラストまたは記号に数字を割り当てることで背後の循環性を確認し (Figure 1 参照), 演算規則が成り立つことを説明した。質問があるかを確認後，実験参加者は練習のために 3 問に取り組んだ。解き終わるか，どうしても解けないという時点で，

Table 3
転移テストにおける演算規則と設問

演算規則	◇◇→☆	☆☆→▽	◇▽→◇
	☆▽→☆	◇☆→◎	
設問	(1) ◇▽◇	(2) ◇☆▽	
	(3) ☆☆☆	(4) ◎◎◇	
	(5) ◎☆◎◎	(6) ▽☆◇◇	
	(7) ◎◇☆☆	(8) ☆◎☆☆◇	
	(9) ◇◇◇▽▽	(10) ◎▽◇☆◎◇	

注：▽を単位元として扱った。

答え合わせを行った。未回答または誤答がある場合は規則性の確認を行い，質問があるかを確認した。

次に，1 枚目の例題プリントを回収し，2 枚目の例題プリントを配布した。2 枚目の問題が 1 枚目と同様に解くことができることを実験参加者に伝えた。実験参加者は，5 分間，2 枚目の例題プリントの問題に取り組んだ。答え合わせを行い，未回答または誤答がある場合，規則性の確認を行い，質問があるかを確認した。

2 枚目の例題プリントを回収した後，転移テストを配布した。実験参加者には，転移テストが例題プリントと同様に解けること，例題プリントとは異なり 4 種の記号からなるパズルであることに注意することを教示した。さらに，設問は 10 個あり，最大で 10 分の時間をとること，但し，10 分より早く終わった場合，その時点で終了とすることを説明した。その後，実験参加者の手元の撮影を開始した。スマートフォンの録画が正常に行われていることを確認し，実験参加者に 10 分に設定されたタイマーを見せながら，「よーい，始め」のかけ声とともに解答を始めた。実験者はタイマーを持って実験参加者から見えない位置へ移動した。

転移テスト終了後，転移テストを回収し，ディブリーフィングを行い，実験内容を他の人に伝えないようにお願いし，実験を終了した。

結果と考察

群ごとの平均正答数と平均反応時間を Table 4 に示す。なお，反応時間は，実験者と他 2 名の計 3 名が，各実験参加者の解答映像を見て，開始から設問 (4) の回答を記入し終えるまでの時間として計測した。これは，設問 (1) 〜 (3) とは異なり，設問 (4) からは実験参加者自身が演算規則から modulo 構造を見出さないと解くことができないからである。また，反応時間の分析は，転移テストの設問 (4) を解けなかった I-NA 群の 1 名のデータを除外して行った。

Table 4
実験 1 における平均正答率と平均反応時間

群	I-A	NI-A	I-NA	NI-NA
正答数 (問)	9.1	9.2	9.2	9.6
反応時間 (秒)	214.7	210.3	224.1	202.5

平均正答数について，参加者間 2 要因分散分析を行った結果，イラストの主効果 (F (1, 36) = 0.22, p = .64)，恣意性の主効果 (F (1, 36) = 0.22, p = .64)，イラストと恣意性の交互作用 (F (1, 36) = 0.08, p = .78) のいずれも有意ではなかった。

平均反応時間についても同様の分析を行ったが，イラストの主効果 (F (1, 35) = 0.12, p = .74)，恣意性の主効果 (F (1, 35) = 0.00, p = .99)，イラストと恣意性の交互作用 (F (1, 35) = 0.05, p = .82) のいずれも有意ではなかった。平均正答数はどの群も 10 題中 9 問を超えており，天井効果になっていると考えられる。このことは，転移テストがどの群の実験参加者にとっても総じて容易であった可能性を示唆している。大学生を対象とした Kaminski (2017) の実験同様，本実験では，学習段階は modulo 3，転移テストは modulo 4 であった。また，Kaminski の実験における転移テストの平均正答率は 41.1%であった。本実験の転移テストと Kaminski の実験における転移テストはほぼ同質であると考えられるため，本実験における天井効果的な成績は，問題それ自体の容易さには帰属できないと考えられる。

本実験の参加者と Kaminski (2017) の実験の参加者の数学的能力に違いがないことを仮定すれば，本結果は，例題プリントによる練習を 2 段階にしたことで，modulo 構造に必要な思考プロセスに対する慣れが生じたと考えられる。Kaminski の実験では言わば 1 段階の練習手続きであった。本実験では例題プリントが 2 枚，すなわち学習を 2 段階行ったことにより，どの群も転移テストでの得点が上がり，群間に本来あると推定される成績の違いが検出できなくなった可能性がある。以上の考察から，実験 2 では，2 枚目の例題プリントを除き，例題プリント 1 枚を学習した後に，転移テストを行うように手続きを変更した。

実験 2

方法

実験参加者　岐阜大学教育学部 46 名 (男性 11 名,

女性 35 名)。平均年齢は 20.52 歳 ($SD = 0.54$)。

実験計画　要因計画は実験 1 と同様であった。実験参加者を無作為に割り当てた結果, I-A 群, I-NA 群は 12 名，NI-A 群，NI-NA 群は 11 名となった。

実験課題　実験 1 の例題プリント 1 枚目と転移テストを用いて行った。

手続き　実験 1 の 2 枚目の例題プリントに関する教示を省いた以外は同じであった。

結果と考察

群ごとの平均正答数と平均反応時間を Table 5 に示す。反応時間は，実験 1 と同様にして計測した。また，反応時間の分析は，転移テストの設問 (4) を解けなかった I-A 群の 2 名，NI-A 群の 1 名，I-NA 群の 5 名，NI-NA 群の 2 名のデータを除外して行った。

平均正答数について,「イラスト」×「恣意性」の参加者間 2 要因分散分析を行った結果，イラストの主効果が有意であった ($F(1, 42) = 5.20$, $p = .03$, $\eta^2 = 0.11$)。恣意性の主効果 ($F(1, 42) = 0.13$, $p = .73$), イラスト×恣意性の相互作用 ($F(1, 42) = 0.00$, $p = .99$) は有意ではなかった。

平均反応時間についても同様の分析を行った。イラストの主効果 ($F(1, 32) = 0.37$, $p = .55$)，恣意性の主効果 ($F(1, 32) = 2.71$, $p = .11$)，イラストと恣意性の交互作用 ($F(1, 32) = 0.43$, $p = .52$) のいずれも有意ではなかった。

実験 2 の目的は，実験 1 同様にイラストの有無と恣意性の有無の違いによって，抽象例への転移の生じやすさにどのような違いがあるか検討することであった。実験の結果，イラストなしの正答数がイラストありの正答数よりも高くなることが示された。これは，抽象例による学習の方が具体例による学習よりも抽象的転移テストでの正答数が高く，視覚情報が少ない方が転移が生じやすいという Kaminski et al. (2005) と同等の結果となった。

また，恣意性の主効果は，正答数でも反応時間でも認められなかった。恣意的でない例示として用いた信号とその漢字に対して，実験参加者はその循環性をすぐに気づいたとしても，剰余演算としての modulo 構造を把握しにくかったためかもしれない。Kaminski et al. (2005) が具体例として用いた計量カップ (と水の量) は水の量が 0，1，2 と数字に置き換えやすく modulo の規則性に気づきやすかったと思われる。本研究で用いた信号とその漢字は，循環をしているものの，どれを単位元としてみなすべきか, あるいはどのように数字に置き換えるべきかが容易でなかったために，恣意的でない例示であっても modulo の規則性を見つけるプロセス自体が恣意的な例示とあまり違いがなかった可能性がある。

反応時間においてはいずれの主効果・交互作用も認められず，反応時間に関する仮説は支持されなかった。しかし，恣意的でない例示の群 (I-NA 群と NI-NA 群) の反応時間は，記述統計の上では，他の群よりも数十秒は早いように見える。しかし，設問 (4) までの反応時間と転移テスト全体の正答数はほとんど関係がないと考えられ，modulo 構造の把握と活用に大きく関わるのは，Kaminski (2017; Kaminski et al., 2005) の知見同様，抽象的例示による学習経験であるということができるだろう。

Table 5
実験 2 における平均正答数と平均反応時間

群	I-A	NI-A	I-NA	NI-NA
正答数 (問)	5.9	8.2	5.6	7.8
反応時間 (秒)	313.5	311.6	208.1	266.1

総合考察

本研究の目的は，具体性を持つイラストの有無と恣意性の有無の違いによる転移の生じやすさを検討することであった。

本研究では，具体例ではなく抽象例を用いる方が, 抽象的な転移テストにおける正答数が高くなった。これは，具体例よりも情報量が少ない分，抽象例は背後の法則や数学的構造に注意を向けやすくするなり，転移が生じやすくなったためと考えられる (Kaminski, 2017; Kaminski et al., 2005)。また，De Bock et al. (2011) が示した選択的な転移現象，すなわち, 具体例による学習が抽象例に対して負の転移をもたらす一方，抽象例による学習は具体例に対して正の転移をもたらすことも，抽象例が情報量の少ない単

調な記号であるからこそ，形式的な構造を認識しやすくなるからと考えられる。

また，本研究では先行研究では取り扱われなかった反応時間を新たな指標として用いた。これは，転移が生じやすい場合には，学習したことから関係性を見出すまでの時間も速くなると予測したためである。しかしながら，本研究の手続きで測定された反応時間は，転移の効果を示す有効な指標であるとはおそらく言えないが，転移のスムーズさを検討する指標として期待できるため，今後の研究でも指標として創意工夫しながら取り入れられるべきであろう。

本研究では，恣意性による転移の生じやすさは見られなかった。しかし，転移テストが抽象的であることから考えれば，転移に貢献するのは NA 群よりも A 群であり，その逆ではないと予想される。統計的にはこの想定を支持する結果は得られなかったが，イラストの具体性よりもその転移効果への寄与が弱いとしても，恣意性による転移の可能性は今後も検討する必要があるだろう。

数学教育における例の性質の効果は今後も引き続き研究されるべき内容であり，実際の数学教育に応用されるべき内容である。今後の研究の広がりについて 2 点述べる。

1 点目は，恣意性のない例として，循環性を持ちかつ数字に置き換えやすい例を用いるなど，用いる素材の吟味が必要となるということである。これは，本研究で扱ったのが modulo であったことを踏まえているものの，modulo に限らず，数学では「構造の把握」するスキルも重要になるからである。この点で，本研究は具体例の使用を否定するものではない。Polya (1945 柿内訳 1954) が言うように，「数学は抽象的なものであるからこそ，極めて具体的に示されなければならないのである (p.213)」という指導的態度も重要であろう。但し，イラストが転移を阻害する可能性を踏まえれば，抽象的な数学的構造の学習に貢献する具体的例示や例示方法に関する適正処遇交互作用について検討することが重要であろう。

2 点目は，実験の場や実験の対象者を教育現場に移すことである。本稿冒頭で触れたように，日本の中学校・高等学校での数学教育の目標には「事象の本質や他の事象との関係を認識して統合的・発展的に考察する力」が掲げられている。これは抽象化とその適用を拡大するスキルであり，学習の転移の現れとして，数学教育において獲得が期待される能力である。そのため，恣意性と転移に関するエビデンスを積み重ねると同時に，対象者を教育現場に移し，学習の転移に有効な手立てを考える必要がある。

本研究は，抽象例の転移の優位性の確認と恣意性と転移の関連についての新たな視点を示した。今後，上記の課題が実験的に検討され，教育現場での教材開発で活用されていくことが期待される。

引用文献

Brown, M. C., McNeil, N. M., & Glenderg, A. M. (2009). Using concreteness in education: Real problems, potential solutions. *Child Development Perspectives*, *3* (3), 160-164.

De Bock, D., Deprez, J., Van Dooren, W., Roelens, M., & Verschaffel, L. (2011). Abstract or concrete examples in learning mathematics? A replication and elaboration of Kaminski, Sloutsky, and Heckler’s study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42* (2), 109-126.

Kaminski, J. A. (2017). A transfer of learning diagrammatic representations of mathematics. In G. Gunzelmann, A. Howes, T. Tenbrink & E. J. Davelaar (Eds.), *Proceedings of the 39th annual meeting of the Cognitive Science Society* (pp.2356-2361). Austin, TX: Cognitive Science Society.

Kaminski, J. A., Sloutsky, V. M., & Heckler, A. F. (2005). Relevant concreteness and its effects on learning and transfer. In B. G. Bara, L. Barsalou & M. Bucciarelli (Eds.), *Proceedings of the 27th annual meeting of the Cognitive Science Society* (pp. 1090-1095). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaminski, J. A., Sloutsky, V. M., & Heckler, A. F. (2008). The advantage of abstract examples in learning math. *Science*, *320*, 454-455.

金田　茂裕 (2012). フィンランドの算数教科書の加減法のイラストレーション　東洋大学文学部紀要教育学科編, *38*, 17-23.

国立教育政策研究所 (2019). 平成 31 年 (令和元年度) 全国学力・学習状況調査の結果 (概要)

<http://www.nier.go.jp/19chousakekkahoukoku>
(2019 年 8 月 20 日)

MacLane, S. (1986). Mathematics, form and function. New York: Springer-Verlag.
(マックレーン, S. 彌永 昌吉 (監訳) 赤尾 和夫・岡本 周一 (共訳) (2019). 数学—その形式と機能 POD 版　森北出版)

文部科学省 (2017). 中学校学習指導要領 (平成 29 年告示) 解説数学編　日本文教出版

文部科学省 (2018). 高等学校学習指導要領 (平成 30 年告示) 解説数学編理数編　日本文教出版

Polya, G. (1945). How to solve it: A new aspect of mathematical method. Princeton University Press.
(ポリア, G. 柿内 賢信 (訳) (1954). いかにして問題をとくか　丸善)

吉田 利明 (2016). 紙の教科書の発達とデジタル教科書の今後　日本印刷学会誌, *53* (6), 434-440.