岐阜大学教育学部研究報告（自然科学）第40巻，15-19，2016年３月
Sci. Rep. Fac. Educ. Gifu Univ.（Nat. Sci.）40, 15-19, March 2016

並んでいる人数が有限な場合における待ち時間の解析 –箸型並びとフォーク型並び–

栢植　直樹
岐阜大学

概 要

この論文では，2 つのサービス窓口に対して，$2n$ の人が 2 種類の並び方をし，その並び方によって待ち時間がどれだけ異なるのかを調べる．1 つ目の並び方は，2 つの窓口に対して，それぞれ n の人が 1 列に並び，列の移動は行わないとする．他方は，2 つの窓口にに 1 列に並び，サービス窓口のサービスが終わると，列の先頭の人が，空いた窓口に入る．よく知られているように，後者の方が待ち時間は少なくて済む．この論文では，サービス時間が指数分布に従うとすれば，両者の待ち時間の差は $\sqrt{n}$ のオーダーで広がっていくことを示す．

キーワード: 待ち行列，期待値，フォーク並び，指数分布

1　導入

サービス率 μ の 2 つのサービス窓口を考える．これら 2 つのサービス窓口に $2n$ 人の人が並んでいる．1 つは，(A) 2 つのサービス窓口にそれぞれ n 人ずつ並んでおり，並んでいる人は列の移動を行わないとする（この並び方を**箸型**と呼ぶ.）．もう 1 つは，(B) 2 つのサービス窓口に 1 列に並び，サービス窓口が空いたら列の先頭の人が空いたサービス窓口でサービスを受けるとする（この並び方を**フォーク型**と呼ぶ.）．このとき，(A)，(B) 各並び方に対して，$2n$ 人全員がサービスを終えるまでの時間の期待値を求め，その比較をする．

客が到着する場合の M/M/1，M/M/2 モデルの定常問題に対して，上記のような比較が，[3, 8 章] で行われている．それに対して，本論文では既に何人かの人が並んでおり，それ以降は人が到着しない場合の非定常問題を考える．例えば，店が客に整理券が配った場合は，整理券をもらえなかった客は購入できないから，店は予め客の人数を把握できる．このようなときに，店はどのように客を処理すれば，どれだけ客を待たせずに済むかを考える事は重要である．その他にも健康診断等予め来る人の数が分かっているときへの応用が期待できる．なお，本論文は窓口が 2 つの場合を考えているが，より多くの窓口の場合にも容易に拡張する事ができる．

さて，1 つのサービス窓口に客が並んでいるとする．$N(t)$ を時刻 t においてサービスの終わった人の人数とし，$N(0)=0$ とする．このとき，以下を仮定する．

仮定 1 （独立性）任意の自然数 n と，区間 $(0,\infty)$ から選んだ n 個の点 $0<u_1<u_2<\cdots<u_n$ に対して，以下は独立な確率変数である．

$$N(u_1), N(u_2)-N(u_1), \cdots, N(u_n)-N(u_{n-1}).$$

仮定 2 （定常性）各 $s,t\geq 0$ に対して，$N(t+s)-N(t)$ の分布は t に依らない．即ち，任意の $n\in\mathbf{N}$ に対して，$P(N(t+s)-N(t)=n)=P(N(s)-N(0)=n)=P(N(s)=n)$.

仮定 3 （希少性）任意の $t\geq 0$ に対して，微小な分割時間 $[t, t+\Delta t)$ に 2 名以上来る確率は $o(\Delta t)\quad(\Delta t\to 0)$ である．

上記の仮定を満たすとき，サービス時間は指数分布に従う（[1]，[2] 参照）．

サービス窓口のサービス率を μ とし，サービス窓口が空くと即座に客がサービス窓口に入るという状況の下では，時刻 t に n 人のサービスが終わっている確率 $P_n(t)$ は

$$P_n(t)=\frac{(\mu t)^n}{n!}e^{-\mu t} \tag{1}$$

となる．

さらに，サービス率 μ の 2 つのサービス窓口に客が一列に並んでおり，サービス窓口が空くと列の先頭の客が空いたサービス窓口に即座に入るという状況の下では，時刻 t に n 人のサービスが終わっている確率は

$$\frac{(2\mu t)^n}{n!}e^{-2\mu t} \tag{2}$$

となる．これはサービス率 2μ の 1 つのサービス窓口に対する確率と同じであることに注意する．

2　2 つの並び方の確率分布と期待値

定理 2.1. (A) サービス率 μ の 2 つのサービス窓口に n 人の人がそれぞれ 1 列に並んでいる．ただし，列の移動は行わないとする．このとき，時刻 t までに両方の列に並んでいる $2n$ 人全員のサービスが終わる確率は

$$\int_0^t 2\mu\left(1-\sum_{k=0}^{n-1}P_k(s)\right)P_{n-1}(s)ds$$

であり，全員のサービスが終わる時間の期待値は

$$E_n=\frac{n}{\mu}\left(1+\frac{{}_{2n}C_n}{4^n}\right) \tag{3}$$

である．

証明　$t \geq 0$ と $m \in \mathbf{N}$ に対して，$\Delta s = t/m,\ s_l = l\,\Delta s \quad (l = 0, 1, 2, \ldots, m)$ とおく．

時刻 s_l までに片方の列に並んでいる人のサービスが全て終わっており，かつ残りの列に並んでいる $n-1$ 人のサービスが終わっているとする．$[s_l, s_l + \Delta s)$ の間に最後の 1 人のサービスが終わる確率は，仮定 3 より，

$$2\left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} P_k(s_l)\right) P_{n-1}(s_l)\mu\Delta s + o(\Delta s).$$

よって，時刻 t までに全ての人のサービスが終わる確率は，

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m-1}\left\{2\mu\left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} P_k(s_l)\right) P_{n-1}(s_l) + o(1)\right\}\Delta s = \int_0^t 2\mu\left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} P_k(s)\right) P_{n-1}(s)ds.$$

このとき，

$$\int_0^\infty 2\mu\left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} P_k(s)\right) P_{n-1}(s)ds = 1 \tag{4}$$

であることに注意せよ（付録 A 参照.）．また，全員のサービスが終わる時間の期待値は

$$\int_0^\infty t \times 2\mu\left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} P_k(s)\right) P_{n-1}(s)ds = \frac{n}{\mu}\left(1 + \frac{{}_{2n}C_n}{4^n}\right).$$

□

定理 2.2. (B) サービス率 μ の 2 つのサービス窓口に $2n$ 人の人がフォーク並びに並んでいる．このとき，t までに全員のサービスが終わる確率は

$$\int_0^t 2\mu^2 e^{-\mu s}\left\{\int_0^s \frac{(2\mu u)^{2n-2}}{(2n-2)!}e^{-\mu u}du\right\}ds$$

であり，全員のサービスが終わる時間の期待値は

$$F_n = \frac{2n+1}{2\mu} \tag{5}$$

である．

証明　$t \geq 0$ と $m \in \mathbf{N}$ に対して，$\Delta s = t/m,\ s_k = k\,\Delta s \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, m)$ とおく．さらに，s_k と $m_k \in \mathbf{N}$ に対して，$\Delta u = s_k/m_k,\ u_l = l\,\Delta u \quad (l = 0, 1, 2, \ldots, m_k)$ とおく．

まず，時刻 u_l までに $2n-2$ 人のサービスが終わっていて，$[u_l, u_l + \Delta u)$ の間に $2n-1$ 人目のサービスが終わる確率は，仮定 3 と (2) より，

$$\frac{(2\mu u_l)^{2n-2}}{(2n-2)!}e^{-2\mu u_l}\cdot 2\mu\Delta u + o(\Delta u)$$

である．

次に，それから時刻 s_k まで最後の客のサービスが終わらない確率を考える．これ以降，客は片方のサービス窓口に 1 人しかいないことに注意する．(1) において $[u_l, s_k]$ の間に 0 人のサービスが終わると考えて，仮定 2 より，

$$\frac{(2\mu u_l)^{2n-2}}{(2n-2)!} 2\mu e^{-2\mu u_l} \Delta u \cdot e^{-\mu(s_k - u_l)} + o(\Delta u)$$

を得る．$[s_k, s_k + \Delta s)$ の間に最後の客のサービスが終わる確率は

$$\frac{(2\mu u_l)^{2n-2}}{(2n-2)!} 2\mu e^{-\mu(s_k + u_l)} \Delta u \cdot \mu \Delta s + o(\Delta s) O(\Delta u) + o(\Delta u) O(\Delta s)$$

である．

よって，s_k までに $2n-1$ 人のサービスが終わって，$[s_k, s_k + \Delta s)$ の間に最後の 1 人のサービスが終わる確率は

$$2\mu^2 e^{-\mu s_k} \Delta s \sum_{l=0}^{m_k - 1} \left\{ \frac{(2\mu u_l)^{2n-2}}{(2n-2)!} e^{-\mu u_l} + o(1)\ (\Delta s \to 0) + o(1)\ (\Delta u \to 0) \right\} \Delta u \tag{6}$$

となる．(6) において，$m_k \to \infty$ として，

$$2\mu^2 e^{-\mu s_k} \Delta s \int_0^{s_k} \frac{(2\mu u)^{2n-2}}{(2n-2)!} e^{-\mu u} du + o(\Delta s)$$

を得る．したがって，時刻 t までにすべての人のサービスが終わる確率 $P(T \leq t)$ は

$$\begin{aligned}
P(T \leq t) &= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ 2\mu^2 e^{-\mu s_k} \int_0^{s_k} \frac{(2\mu u)^{2n-2}}{(2n-2)!} e^{-\mu u} du + o(1) \right\} \Delta s \\
&= \int_0^t 2\mu^2 e^{-\mu s} \left\{ \int_0^s \frac{(2\mu u)^{2n-2}}{(2n-2)!} e^{-\mu u} du \right\} ds \\
&= 2^{2n-2} \left[2 - 2e^{-\mu t} - \sum_{k=0}^{2n-2} \left\{ \frac{1}{2^k} - e^{-2\mu t} \sum_{l=0}^{k} \frac{(\mu t)^k}{2^{k-l} k!} \right\} \right]
\end{aligned}$$

となる．ここで，$\lim_{t \to \infty} P(T \leq t) = 1$ であることに注意せよ．

また，全ての人のサービスが終わる時間の期待値は

$$\int_0^\infty t \frac{d}{dt} P(T \leq t) dt = \int_0^\infty t \times 2\mu^2 e^{-\mu t} \left\{ \int_0^t \frac{(2\mu s)^{2n-2}}{(2n-2)!} e^{-\mu s} ds \right\} dt = \frac{2n+1}{2\mu}$$

となる． □

3 結論

(3) と (5) を比較すると，すべての n に対して $E_n \geq F_n$ が成り立つ．また，$n = 1$ のときは E_n と F_n は一致する．これは，$n = 1$ のときは全員が直ぐにサービスを受けられるため，2 つの並び方に差異が生じないからである．さらに，スターリングの公式を用いると，$E_n - F_n \sim \sqrt{\frac{n}{\pi}}\quad (n \to \infty)$ であるから（[4, p340, 例 2]），n が大きくなると $\sqrt{n}$ のオーダーで差が広がることが分かる．

付録

A　(4) の証明

$$\int_0^\infty 2\mu\left(1-\sum_{k=0}^{n-1}P_k(s)\right)P_{n-1}(s)ds = 2-\frac{1}{2^{n-1}}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n+k-1}C_k}{2^k}\right\} = 2-\frac{1}{2^{n-1}}S_{n-1}.$$

そのため，$S_n=2^n$ を示せばよい．${}_nC_k = {}_{n-1}C_k + {}_{n-1}C_{k-1} \quad (k\geq 1)$ より，

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{{}_{n+k}C_k}{2^k}+1=\sum_{k=1}^{n}\frac{{}_{n+k-1}C_k}{2^k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{{}_{n+k-1}C_{k-1}}{2^k}+1\\
&=\sum_{k=1}^{n}\frac{{}_{n+k-1}C_k}{2^k}+1+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n+k}C_k}{2^k}\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{n+k-1}C_k}{2^k}+\frac{{}_{2n-1}C_n}{2^n}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_{n+k}C_k}{2^k}-\frac{1}{2}\frac{{}_{2n}C_n}{2^n}\\
&=S_{n-1}+\frac{1}{2}S_n.
\end{aligned}$$

$S_0=1$ より，$S_n=2^n$.

参考文献

[1] 宮沢政清: 待ち行列の数理とその応用 (牧野書店, 2006)

[2] 西田俊夫: 待ち行列の理論と応用 (朝倉書店, 1971)

[3] 塩田茂雄, 川西憲一, 豊泉洋, 会田雅樹: 待ち行列理論の基礎と応用　(共立出版, 2014)

[4] 杉浦光夫: 解析入門 (東京大学出版, 1980)

柘植　直樹
岐阜大学
教育学部数学教育講座
〒 501-1193 岐阜市柳戸 1-1
E-mail: tuge@gifu-u.ac.jp