岐阜大学教育学部研究報告（自然科学）第39巻，9-12，2015年３月
Sci. Rep. Fac. Educ. Gifu Univ.（Nat. Sci.）39, 9-12, March 2015

並び替えによる不等式について

On Inequalities by Rearrangements

畑田　一幸（Kazuyuki HATADA）
岐阜大学教育学部数学教室
〒５０１－１１９３　岐阜県岐阜市柳戸１－１
Gifu University, Department of Mathematics, Faculty of Education,
1-1, Yanagido, Gifu City, GIFU 501-1193, Japan

要旨．実数 a, b, c, d, x, y, z, u を $a \le b \le c \le d$ かつ $x \le y \le z \le u$ とする。
次の(1), (2), (3)を与える。

(1)　$au + bz + cy + dx \le bu + cz + dy + ax$ で等号が成立するための必要十分条件;

(2)　$au + bz + cy + dx \le du + az + by + cx$ で等号が成立するための必要十分条件;

(3)　(1)で等号が成立し，かつ，(2)で等号が成立すれば，

$$a = b = c = d \quad \text{または} \quad x = y = z = u$$

であること。

この系として，下記の(4)と(5)の不等式も得られる。

Abstract.　Let real numbers a, b, c, d, x, y, z, u satisfy $a \le b \le c \le d$ and $x \le y \le z \le u$.
We give the following (1), (2) and (3).

(1)　Necessary and sufficient condition for $au + bz + cy + dx = bu + cz + dy + ax$;

(2)　Necessary and sufficient condition for $au + bz + cy + dx = du + az + by + cx$;

(3)　If $au + bz + cy + dx = bu + cz + dy + ax$ and $au + bz + cy + dx = du + az + by + cx$,
then we have $a = b = c = d$ or $x = y = z = u$.

As corollaries we give inequalities (4) and (5) below.

１．よく知られている定理

例えば文献[1]の Theorem 6.1 と文献[2]の Theorem 368 に書かれている定理はよく知られている。その $n = 4$ の場合を次に記す。

実数a, b, c, d, x, y, z, uを$a \le b \le c \le d$　かつ　$x \le y \le z \le u$　とする。
実数x, y, z, uの任意の並び替えをw_1, w_2, w_3, w_4　で表す。このとき

$$au + bz + cy + dx \le aw_1 + bw_2 + cw_3 + dw_4 \le ax + by + cz + du$$

が成立し，そして，　$au + bz + cy + dx = ax + by + cz + du$ならば，
$a = b = c = d$　または　$x = y = z = u$　が成立する。

要旨に述べたこの論文の結果は，上記のよく知られた定理とは異なっていることがわかる。

次の，補題はよく使われる。証明は易しい。

補題．　実数p, q, r, sを$p \le q$　かつ　$r \le s$　とする。このとき　$ps + qr \le pr + qs$　が成立し，　$ps + qr = pr + qs$となるのは，　$p = q$または$r = s$　である場合に限る。

２．本論文で与える結果

次の定理と系が本論文の結果である。

定理１． 実数a, b, c, d, x, y, z, uを$a \le b \le c \le d$　かつ　$x \le y \le z \le u$　とする。
このとき，次の(1), (2), (3)が成立する。

(1)　$au + bz + cy + dx \le bu + cz + dy + ax$　が成立し，ここで等号が成立するのは下記の(i), (ii), (iii) または (iv)の場合である。

(2)　$au + bz + cy + dx \le du + az + by + cx$　が成立し，ここで等号が成立するのは下記の(v), (vi), (vii) または (viii)の場合である。

(3)　(1)で等号が成立し，かつ，(2)で等号が成立すれば，

$a = b = c = d$　または　$x = y = z = u$

である。

次の結果が定理１より得られる。

定理１の系． 実数 a, b, c, d, x, y, z, u を $0 \le a \le b \le c \le d$ かつ $0 \le x \le y \le z \le u$ とする。ℓ, m を正の整数とする。このとき，次の(4), (5)が成立する。

(4) $(bu+cz+dy+ax)^{\ell}(du+az+by+cx)^{m} \ge (au+bz+cy+dx)^{\ell+m}$,
ここで等号の成立は，$a=b=c=d$ または $x=y=z=u$ に限る。

(5) $(bu+cz+dy+ax)^{\ell}+(du+az+by+cx)^{m} \ge (au+bz+cy+dx)^{\ell}+(au+bz+cy+dx)^{m}$,
ここで等号の成立は，$a=b=c=d$ または $x=y=z=u$ に限る。

定理１の(1)の証明．補題を用いて

$$
\begin{aligned}
& au+bz+cy+dx \\
& \le bu+az+cy+dx \\
& \le bu+cz+ay+dx \\
& \le bu+cz+dy+ax
\end{aligned}
$$

が成立する。(1)の $\le$ が証明された。(1)で=が成立するのは，上の３つの $\le$ がすべて=の時である。補題より，即ち

$(a=b \quad \text{or} \quad u=z) \quad \text{and} \quad (a=c \quad \text{or} \quad z=y) \quad \text{and} \quad (a=d \quad \text{or} \quad x=y)$

の時である。即ち，(1)で=が成立するのは，次の(i), (ii), (iii), (iv)のいずれかの場合である。

(i) $a=b=c=d$;

(ii) $x=y$ and $a=b=c$;

(iii) $a=b$ and $x=y=z$;

(iv) $x=y=z=u$.

定理１の(2)の証明．補題を用いて

$$
\begin{aligned}
& au+bz+cy+dx \\
& \le au+bz+dy+cx \\
& \le au+dz+by+cx \\
& \le du+az+by+cx
\end{aligned}
$$

が成立する。(2)の $\le$ が証明された。(2)で=が成立するのは，上の３つの $\le$ がすべて=の時である。補題より，即ち

$(c=d \quad \text{or} \quad x=y) \quad \text{and} \quad (b=d \quad \text{or} \quad y=z) \quad \text{and} \quad (a=d \quad \text{or} \quad u=z)$

の時である。即ち，(2)で=が成立するのは，次の(v), (vi), (vii), (viii)のいずれかの場合である。

(v) $a=b=c=d$;

(vi) $u=z$ and $b=c=d$;

(vii) $c=d$ and $y=z=u$;

(viii) $x=y=z=u$.

以上より(1)と(2)で=が成立するのは

$$a=b=c=d \quad \text{or} \quad x=y=z=u$$

の時のみであることがわかり，定理 1 の(3)も証明された。

文献

[1]　Z. Cvetkovski, Inequalities, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2012.

[2]　G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Polya, Inequalities, Cambridge University Press, 1934, 1952.