岐阜大学教育学部研究報告（自然科学）第39巻，1-8，2015年３月
Sci. Rep. Fac. Educ. Gifu Univ.（Nat. Sci.）39, 1-8, March 2015

任意の多角形の三角形分割
Triangulations of Any Polygon

畑田　一幸（Kazuyuki HATADA）
岐阜大学教育学部数学教室
〒５０１－１１９３　岐阜県岐阜市柳戸１－１
Gifu University, Department of Mathematics, Faculty of Education,
1-1, Yanagido, Gifu City, GIFU 501-1193, Japan

要旨．　まず，任意の多角形に対して，　三角形分割で，各々の三角形のどの頂点も，元の多角形のいずれかの頂点であるものの存在と，その構成方法を与える。次に，任意の多角形に，任意の個数の，任意の多角形の形状をした穴が開いている図形に対して，三角形分割で，各々の三角形のどの頂点も，その図形のいずれかの頂点であるものの存在と，その構成方法を与える。　そのような三角形分割に現れる三角形の個数も与える。

Abstract.　First, we show that there is a triangulation of any polygon each triangle of which has three vertices that are vertices of the original polygon. Secondly, we treat any polygon that has finite holes of arbitrary polygons. We also show that there is a triangulation of such any figure each triangle of which has three vertices that are vertices of the original figure.　We give also the number of triangles appearing in such a triangulation.

１．　任意の多角形の三角形分割

nを２以上の任意の整数とする。Euclid 平面$\mathbb{R}^2$内の任意の$(n+1)$角形を$A_0A_1A_2\cdots A_n$とする。ここで各A_jはその$(n+1)$角形の頂点を表し，各線分A_jA_{j+1}　$(0 \le j \le n-1)$　と線分A_nA_0　はその$(n+1)$角形の辺を表す。$A_0A_1A_2\cdots A_n$は凸多角形であろうと凹多角形であろうとかまわない。　まず次の２つの定理を与える。

定理１．　$A_0A_1A_2\cdots A_n$の三角形分割で，それを構成する各々の三角形のどの頂点も集合$\{A_j \mid 0 \le j \le n\}$　の要素であるものが，存在する。

定理２． $A_0A_1A_2\cdots A_n$について，定理１の条件を満たす任意の三角形分割を考察する。そして，その三角形分割中の任意の三角形について，その周囲上の点の全体の集合と集合 $\{A_j \mid 0 \le j \le n\}$ の共通部分は，その三角形の３つの頂点のみであると仮定してよい。（三角形分割の細分を考えて，この仮定を満たす，定理１の三角形分割は必ず存在する。）このとき，その三角形分割に現れる三角形の個数は$(n-1)=(n+1-2)$である。

定理２の系． $A_0A_1A_2\cdots A_n$の内角の和は$\pi(n-1)$ である。（角の大きさはラジアンで測ったものとする。）

$A_0A_1A_2\cdots A_n$の頂点A_iの内角の大きさをα_iで表す。全ての α_iが$\pi<\alpha_i<2\pi$を満たすならば，$2\pi-\alpha_i$を考えて，$A_0A_1A_2\cdots A_n$は凸の$(n+1)$角形になる。

定理１の証明．

Case 1. $A_0A_1A_2\cdots A_n$が凸の$(n+1)$角形ならば，線分A_0A_j （$2\le j\le n$） を引くことにより定理１が証明される。

Case 2. $A_0A_1A_2\cdots A_n$が凸でなければ，或る$i\in[0,n]$ に対して$0<\alpha_i<\pi$となる。番号$0,1,2,\cdots,n$を巡回的に付け替えて， $0<\alpha_1<\pi$としてよい。 辺A_1A_2上に動点Pをとり線分A_1Pの長さをtとする。 $0\le t\le\left\|\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}\right\|$ である。このPを$P(t)$で表す。次の(i)と(ii)に場合分けする。

(i) どの$0\le t\le\left\|\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}\right\|$に対しても，線分$A_0P(t)$上の点の全体の集合と集合 $\{A_j \mid 3\le j\le n\}$ の共通部分が空集合$\varnothing$の場合.

(ii) 或る $0\le t\le\left\|\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}\right\|$に対して，線分$A_0P(t)$上の点の全体の集合と集合 $\{A_j \mid 3\le j\le n\}$ の共通部分が空集合$\varnothing$でない場合.

Case 2 の(i)の場合の証明． $A_0A_1A_2\cdots A_n$ を線分 A_0A_2 で分割し， 3角形 $A_0A_1A_2$ と n 角形 $A_0A_2A_3\cdots A_n$ に分けることができる。$n+1$ に関する数学的帰納法により， 定理1が証明された。

Case 2 の(ii)の場合の証明． (ii)の条件を満たす t の最小値が存在し， それを T で表す。集合 $\{A_j \mid 3\le j\le n\}$ の点で， 線分 $A_0P(T)$ 上に存在しているもののうちで， 点 A_0 からの距離が最小な点が唯一つ存在するので， その点を $A_{T(1)}$ で表す。線分 $A_0A_{T(1)}$ は， A_0 と $A_{T(1)}$ 以外に $(n+1)$ 角形 $A_0A_1A_2\cdots A_n$ （の頂点達）と共有点を持たない。$(n+1)$ 角形 $A_0A_1A_2\cdots A_n$ は線分 $A_0A_{T(1)}$ または線分 $A_1A_{T(1)}$ によって２つの多角形に分割される。それらを， c 角形と d 角形とする。構成方法により， $c\ge 3,\ \ d\ge 3,\ \ c+d-2\le n+1$ である。すると $c\le n$ and $d\le n$ となり， $n+1$ に関する数学的帰納法の仮定より， この c 角形と d 角形には， 定理1が成立する。よって $(n+1)$ 角形 $A_0A_1A_2\cdots A_n$ に対しても， 定理1が成立する。
（注． $n+3\ge c+d$ である。ここで $n+3>c+d$ であるとき， $n+2=c+d$ であり， これは線分 $A_0A_{T(1)}$ の $A_{T(1)}$ 側の延長線上に， $(n+1)$ 角形 $A_0A_1A_2\cdots A_n$ の， $A_{T(1)}$ の隣の頂点が存在する場合である。）

以上で定理1が証明された。

定理2の証明． 定理2に記した任意の三角形分割について考える。その分割の中の任意の三角形をとる。

$n+1$ が3のときは， その三角形は元の3角形と一致する。一個の三角形しかなく， 定理2が成立する。

$n+1$ が4以上のとき， その三角形の少なくともひとつの辺は， $(n+1)$ 角形 $A_0A_1A_2\cdots A_n$ の辺ではない。その辺で $(n+1)$ 角形 $A_0A_1A_2\cdots A_n$ を二つに分割する。e 角形と f 角形になったとする。$e<n+1$ and $f<n+1$ であり， 数学的帰納法の仮定により， e 角形の方は $e-2$ 個の三角形に分割されており， f 角形の方は $f-2$ 個の三角形に分割されている。$(e-2)+(f-2)=e+f-4$ であり， $(e-1)+(f-1)=n+1$ である。よって， $e+f-4=n-1$ である。

定理２は証明された。

２． 多角形から多角形の穴を有限個取り除いた図形の三角形分割

n を２以上の任意整数とする。k を０以上の任意整数とする。次の２つの定理を与える。

定理 3. 任意の $(n+1)$ 角形 $A_0A_1A_2\cdots A_n$ の中に，k 個の任意の多角形

$$B_{j,0}B_{j,1}B_{j,2}\cdots B_{j,m(j)} \qquad (j=0,1,2,\cdots,k-1)$$

が交差せずに，存在しているとする。$(n+1)$ 角形 $A_0A_1A_2\cdots A_n$ の内部と縁から，これら k 個の多角形を，穴として取り除いた図形は，各頂点が

$$\{A_t \mid 0 \le t \le n\} \bigcup \{B_{j,t} \mid 0 \le j \le k-1 \text{ and } 0 \le t \le m(j)\}$$

の要素である３角形からできている三角形分割に，分割することができる。

（ここで，$B_{j,0}B_{j,1}B_{j,2}\cdots B_{j,m(j)}$ は頂点を $\{B_{j,y} \mid 0 \le y \le m(j)\}$ とする $(m(j)+1)$ 角形を表す。凸でも凹でもよい。）

定理４． 定理３の図形に関して，定理３の条件を満たす任意の三角形分割を考察する。その三角形分割中の任意の三角形について，その周囲上の点の全体の集合と集合 $\{A_t \mid 0 \le t \le n\} \bigcup \{B_{j,t} \mid 0 \le j \le k-1 \text{ and } 0 \le t \le m(j)\}$ の共通部分は，その三角形の３つの頂点のみであると仮定してよい。（三角形分割の細分を考えて，この仮定を満たす，定理３の三角形分割は必ず存在する。）このとき，その三角形分割に現れる三角形の個数は

$$n+1+2k-2+\sum_{j=0}^{k-1}(m(j)+1) \qquad \text{if} \quad k \ge 1$$

である。$k=0$ の時は定理２で扱ったように，$n-1$ である。

定理４の系. $k \ge 1$ のとき，定理３の図形の内角の和は $\pi(n+1+2k-2+\sum_{j=0}^{k-1}(m(j)+1))$ である。（角の大きさはラジアンで測ったものとする。）

定理３の証明． $k=0$ の場合は定理１で既に証明した。 k に関する数学的帰納法で証明する。或る整数 $K \geq 0$ に対して， $k=K$ のとき， 定理３が成立するとする。
この下で $k=K+1$ のときを考える。この場合を， n に関する数学的帰納法で証明する。
定理１の証明と同じく， $A_0A_1A_2\cdots A_n$ の添数を巡回的に付け替えることにより， $\angle A_1$ を 0 より大， π より小と仮定してよい。P を線分 A_1A_2 上の点とする。P を A_1 から A_2 まで動かす。
$\left\|\overrightarrow{\mathrm{A_1P}}\right\| = t$ とおく。この P を $P(t)$ で表す。$\left\|\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}\right\| \geq t \geq 0$ である。

（I）　$n=2$ の場合.

線分 $A_0P(t)$ 上の点の全体の集合と集合 $\{B_{j,y} \mid 0 \leq j \leq K \quad \text{and} \quad 0 \leq y \leq m(j)\}$ の共通部分を $\Omega(t)$ で表す。$k=K+1$ なので，$\exists t(0<t<\left\|\overrightarrow{A_1A_2}\right\| \quad \text{and} \quad \Omega(\mathrm{t}) \neq \varnothing)$ である。$\Omega(t) \neq \varnothing$ となる t の最小値を（(I)では ）T とおく。 $\Omega(T)$ の元で A_0 からの距離が最小な点を $B_{J,Y}$ と書く。（$0 \leq J \leq K$ である。） 考えている図形を線分 $A_0B_{J,Y}$ で切る。そうすると $3+m(J)+1+2$ 角形の中に K 個の多角形の穴があいている場合になる。$K<K+1$ 故， 数学的帰納法の仮定が使える。定理３を満たす三角形分割が可能である。
(II)　$k=K+1$ かつ $n=N \geq 2$ で定理３が成立すると仮定して， $n=N+1$ の時を考える。（一番外側の多角形が $N+2$ 角形の時を考える。）$k=K+1 \geq 1$ である。定理１の証明と同じ記号を用いる。 線分 $A_0P(t)$ 上の点の全体の集合と集合 $\{A_j \mid 3 \leq j \leq n\} \bigcup \{B_{j,y} \mid 0 \leq j \leq K \quad \text{and} \quad 0 \leq y \leq m(j)\}$ の共通部分を $\Omega(t)$ で表す。次の(3.1)と(3.2)に場合分けする。

(3.1)　すべての t with $\left\|\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}\right\| \geq t > 0$ に対して $\Omega(t) = \varnothing$.

(3.2)　或る t with $\left\|\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}\right\| \geq t > 0$ に対して $\Omega(t) \neq \varnothing$.

(3.1)の場合： 線分 A_0A_2 で， 考察している図形を分割できる。ひとつの三角形部分と， 残りの部分に分けられ， 後者については外側部分の縁が $N+1$ 角形になる。数学的帰納法の仮定が使えて， 三角形部分の方ではない， 残りの部分の図形は， 定理３の条件を満たすように三角形分割可能である。前者の三角形と合わせて， 考察している図形の， 定理３の条件を満たす三角形分割ができる。
(3.2)の場合: $\Omega(t) \neq \varnothing$ となる t の最小値を T で表す。線分 $A_0P(T)$ 上に存在し， しかも， 集合 $\{A_j \mid 3 \leq j \leq n\} \bigcup \{B_{j,y} \mid 0 \leq j \leq K \quad \text{and} \quad 0 \leq y \leq m(j)\}$ の要素である点のうちで， A_0 か

らの距離が最小の点をQで表す。すると

(3.2.1)　$Q \in \{A_j \mid 3 \le j \le n\}$

または

(3.2.2)　$Q \in \{B_{j,y} \mid 0 \le j \le K \quad \text{and} \quad 0 \le y \le m(j)\}$

が成立する。

(3.2.1)のとき：　考察している図形は線分A_0Qまたは線分A_1Qで二つに分割される。$n+1=N+2$のときを，今，考えている。この二つの図形について，各々の図形の外側の縁は，u角形とv角形で

$$N+2+2 \ge u+v, \quad u \ge 3, \quad v \ge 3$$

を満たしている。これより$u \le N+1 < N+2$かつ$v \le N+1 < N+2$となる。よって，二つの，各々の図形に対して，数学的帰納法の仮定が使える。それらの図形はどちらも，定理３の条件を満たすように三角形分割できる。よって，最初の図形も，定理３の条件を満たすように三角形分割できる。

(3.2.2)のとき：　考察している図形を線分A_0Qで切ると，全体の外形が$N+4$角形でK個の穴が空いている場合になる。kに関する数学的帰納法の仮定により，この図形は，定理３の条件を満たすように三角形分割できる。よって，考察している図形は，定理３の条件を満たすように三角形分割できる。

以上で，定理３は証明された。

定理４の証明． 定理３の条件を満たす図形の，定理４の条件を満たす三角形分割を扱う。定理２により，$k=0$の場合は証明されている。$k=K \ge 0$の時，定理４は正しいとして，$k=K+1$の場合を考察する。これを$n+1$に関する数学的帰納法で証明する。

(4.1)　$n+1=3$の場合．定理４の条件を満たす三角形分割を構成する三角形で，線分A_0A_1を辺とするものが存在する。その三角形の残りの頂点は，$K+1$個の穴のいずれかの頂点である。その点をRで表す。辺A_0Rで，考察している図形を切断する。すると，外側の縁が$(3+2+($$R$を含む穴の頂点の数$))$角形で，穴の個数が$K$個の図形になる。数学的帰納法の仮定が使えて，元の図形に対し，考察している三角形分割の三角形の個数は

$$3+2+(R\text{を含む穴の頂点の数})+(\text{残りのすべての穴の頂点の数の和})+2K-2$$

となり，これは

$$3+(\text{すべての穴の頂点の数の和})+2(K+1)-2$$

と等しく，$n+1=3$かつ$k=K+1$の時，定理４が成立することが分かった。

(4.2)　$k=K+1$で，或る2以上の整数Nに関して，（$2\le n\le N$ならば，常に，このnと$k=K+1$に対して定理４が成立する）と仮定する。この下で，$n=N+1$ の場合を考える。（即ち，外側の縁が$N+2$角形の場合を考える。）

定理４の条件を満たす三角形分割の中の三角形で線分A_0A_1を一辺とするものがある。その三角形の残りの頂点をQで表す。次の二つの場合に分けられる。

(4.2.1)　$Q\in\{A_j\,|\,2\le j\le N+1\}$.

(4.2.2)　Qは，$K+1$個の穴のいずれかの穴の頂点である。

(4.2.1) の場合：　線分A_0Qで，考察している図形はふたつの部分に分割される。このとき，外側の縁の$N+2$角形はu角形とv角形に分割され，$u-1\le N$，$u\ge 3$，$v\ge 3$である。よって$u-1\le N$かつ $v-1\le N$となる。よって．そのu角形とそのv角形のどちらの部分についても，定理４の結論が成立する。(4.2)の図形に関して，考察している三角形分割の三角形の個数は，(u角形部分の三角形分割の三角形の個数＋ v角形部分の三角形分割の三角形の個数)となる。それを計算する。

$$
\begin{aligned}
&((u-1)+1+(u\text{角形部分の内部の穴の頂点数の和})+2(u\text{角形部分の内部の穴の数})-2)\\
&+((v-1)+1+(v\text{角形部分の内部の穴の頂点数の和})+2(v\text{角形部分の内部の穴の数})-2\\
&=u+v+(\text{すべての穴の頂点数の和})+2(\text{すべての穴の数の和})-4\\
&=(N+1)+1+(\text{すべての穴の頂点数の和})+2(\text{すべての穴の数の和})-2\\
&=(N+1)+1+\sum_{j=0}^{K+1-1}(m(j)+1)+2(K+1)-2
\end{aligned}
$$

よって(4.2.1)のときに，定理４の結論は成立する。

(4.2.2)の場合：　線分A_0Qで，考察している図形を切断する。そうすると，穴の個数はK個で，外側の縁の多角形の頂点の個数は

$$(N+1)+1+2+(Q\text{が属する穴の頂点の個数})$$

になる。よって，数学的帰納法の仮定（K個の穴の場合）が使えて，その三角形分割の三角形の個数は

$$
\begin{aligned}
&((N+1)+1+2+(Q\text{が属する穴の頂点の個数}))+(Q\text{が属さない穴達の頂点の個数の和})\\
&+2((K+1)-1)-2
\end{aligned}
$$

となる。これは

$$
\begin{aligned}
&N+(\text{全ての穴に関する頂点の数の総和})+2(K+1)\\
&=(N+1)+1+(\text{全ての穴に関する頂点の数の総和})+2(K+1)-2
\end{aligned}
$$

に等しい。

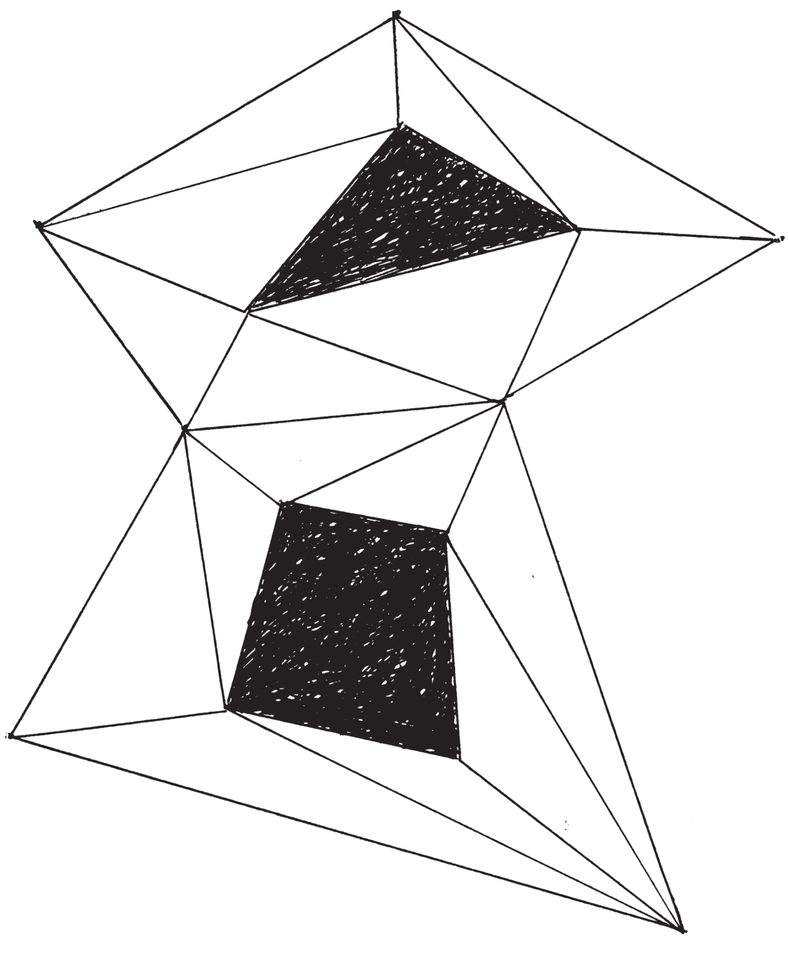
よって(4.2.2)のときにも，定理４の結論は成立する。

以上より， $k = K+1$で， $n = N+1$ の場合も， 定理４の結論は成立することが分かった。

(4.1)と(4.2)より， 定理４は証明された。

あとがき．　凸多角形に関しては， 定理１の条件を満たす三角形分解の存在は， 極めて易しくて， 中学校で三角形の内角の和が180度であることを教える際， 扱われていることが多いと思われる。しかし， 凹多角形や穴のあいた凸または凹多角形に関して， 本論文に書いた定理１，定理２， 定理３， 定理４は， 文献を探しても見つけることができなかった。また， 本論文に書いた定理１， 定理２， 定理３， 定理４は， 学生や生徒の教育上でも有用かつ重要なので，ここに公表することにした。筆者の今までの経験では， 学生で， 定理１， 定理２， 定理３，定理４の証明が， ひとつでもできるものはいなかったので， この論文を公表する価値はあると思われる。

例



$7+3+4+2\times2-2=16$