岐阜大学教育学部研究報告（自然科学）第38巻，1-4，2014年３月
Sci. Rep. Fac. Educ. Gifu Univ. (Nat. Sci.) 38, 1-4, March 2014

三角形に関するオイラーの不等式$2r \le R$について

On Euler's Inequality $2r \le R$ for any triangle

畑田　一幸（Kazuyuki HATADA）
岐阜大学教育学部数学教室
〒５０１－１１９３　岐阜県岐阜市柳戸１－１
Gifu University, Department of Mathematics, Faculty of Education,
1-1, Yanagido, Gifu City, GIFU 501-1193, Japan

要旨．任意の三角形 ABC に対して，r を三角形 ABC の内接円の半径，R を三角形 ABC の外接円の半径とする。このとき，オイラーによって，「$2r \le R$ が成立し，ここで等号が成立するのは三角形 ABC が正三角形の場合に限る」が知られている。これの易しい証明を与える。そして，これを高次元単体へ拡張することを研究問題として提起する。

Abstract. Let $\triangle\mathrm{ABC}$ be an arbitrary triangle, let r denote the inradius of $\triangle\mathrm{ABC}$ and let R denote the circumradius of $\triangle\mathrm{ABC}$. L. Euler gave that $2r \le R$ and that the equality holds if and only if $\triangle\mathrm{ABC}$ is equilateral. We give an elementary proof of these. And, we raise the following problem. Extend this inequality to an arbitrary *n*-dimensional simplex for *n*>2.

１．　この不等式のよく知られている証明

O で三角形 ABC の外心を表し，I で三角形 ABC の内心を表す。

Euler による等式：$0 \le \left\|\overline{\mathrm{OI}}\right\|^2 = R(R-2r)$ をまず証明する。これより直ちに，「$2r \le R$ が成立し，ここで等号が成立するのは三角形 ABC が正三角形の場合に限る」が得られる。([1, p.48] 参照。)

文献上でも，インターネット上でも，$2r \le R$ の証明を探したが，筆者が見つけたのは，この証明だけであった。

２．　本論文で与えるこの不等式の証明

任意の三角形 ABC に対して，$\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\|=c,\quad \left\|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right\|=a,\quad \left\|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right\|=b,\quad s=(a+b+c)/2$

とおく。Euler によって与えられた次の命題の simple な証明を与える。

命題1． 任意の三角形 ABC に対して，r を三角形 ABC の内接円の半径，R を三角形 ABC の外接円の半径とする。$2r\le R$ が成立し，ここで等号が成立するのは三角形 ABC が正三角形の場合に限る。

証明． P で三角形 ABC の面積を表す。よく知られているヘロンの定理により $P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ である。一方，$P=sr$ を得る。故に，

$r=\sqrt{s^{-1}(s-a)(s-b)(s-c)}$ を得る。

さて，算術平均と幾何平均の不等式により，

$$\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}\le\frac{s-a+s-b+s-c}{3}=\frac{s}{3}$$

が成立し，ここで等号が成立するのは $s-a=s-b=s-c$ すなわち $a=b=c$ のときのみであることが，よく知られている。

以上より，$r=\sqrt{s^{-1}(s-a)(s-b)(s-c)}\le\sqrt{\dfrac{s^2}{27}}=\dfrac{s}{3\sqrt{3}}$ が成立し，ここで等号が成立するのは $a=b=c$ のときのみであることが分かった。

α で $\angle\mathrm{A}$ の大きさを表し，β で $\angle\mathrm{B}$ の大きさを表し，γ で $\angle\mathrm{C}$ の大きさを表す。

さて正弦定理により $s=R(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$ である。よって

$$r\le\frac{R}{3\sqrt{3}}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$$

が成立し，ここで等号が成立するのは $\alpha=\beta=\gamma$ のときのみである。

高等学校で学ぶ程度の数学を用いて，

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

が，そして，ここで等号が成立するのは $\alpha=\beta=\gamma$ のときのみであることが，証明できる。例えば，次のように示すことができる。

$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\pi-\alpha-\beta)=\sin\alpha+2\sin(\alpha/2+\beta)\cos(\alpha/2)$

と変形し，$0<\alpha/2+\beta<3\pi/2$ を用いると，$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$ の最大値は $\alpha/2+\beta=\pi/2$ のとき得られることが分かる。また，

$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\pi-\alpha-\beta)=\sin\beta+2\sin(\beta/2+\alpha)\cos(\beta/2)$

と変形し，　$0<\beta/2+\alpha<3\pi/2$　を用いると，$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$ の最大値は $\beta/2+\alpha=\pi/2$ のとき得られることが分かる。以上合わせて $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$ の最大値は $\alpha=\beta=\pi/3$ のとき得られることが分かる。故に $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le 3\sin(\pi/3)=3\sqrt{3}/2$ が得られた。

(注 1.　[2, p.80]に，凸関数に関する Jensen の不等式を用いた，これの別証明が有る。)

以上の結果により

$$r\le\frac{R}{3\sqrt{3}}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)\le\frac{R}{2}$$

（ここで等号が成立するのは三角形 ABC が正三角形である場合のみである）

が得られ，命題 1 が証明された。

注２．[2]には，上記の命題 1 の証明は書かれていない。しかし，[2,　p.19]の下から 3 行目に，"The first equality $2r\le R$ follows by using geometric formulas and mean inequalities," と書かれている。　Cvetkovski が考えている証明が，本論文で畑田が書いた証明と同じか否かは不明である。

注３．　命題 1 の，ここに書いた畑田の証明は易しく初等的なので，もしかすると，それは過去に既に知られていたかもしれないという疑問は有る。しかし，それが書かれている出版物を現実に見つけることはできなかった。それゆえ，命題 1 の上記の証明をここに出版・公表することは，価値があると考える。また，これを出版・公表することは，学生の教育にも有用である。

３．　高次元への拡張について

筆者は次の問題を提起する。

残されている問題(Open Problem).　$n\ge 3$ を整数とし，$n+1$ 次元ユークリッド空間内の n 次元単体 $A_0A_1A_2\cdots A_n$ について，r でそれに内接する n 次元超球の半径をあらわし，R でそれに外接する n 次元超球の半径をあらわす。このとき，$nr\le R$ が成立するのか？　$nr=R$ が成立するのは，$A_0A_1A_2\cdots A_n$ が正 n 次元単体であるときに限るのか？

（ここで n 次元単体 $A_0A_1A_2\cdots A_n$ が正 n 次元単体であるとは，$\left\|\overrightarrow{A_iA_j}\right\|=\left\|\overrightarrow{A_0A_1}\right\|$ がすべての $0\le i<j\le n$ に対して成立することである。）

文献

[1] O. Bottema et al, Geometric Inequaities, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.

[2] Z. Cvetkovski, Inequalities, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2012.

校正時に付け加えた注 (Note added in proof).

[2, p.20]の Proposition 3.1 について，[2]の著者の Z.Cvetkovski は，“we note that the following properties are true, and we'll present them without proof.”と[2,p.19]で書き，$2r \leq R$ の証明は与えていない。そこで，筆者は本論文でひとつの証明を与えたのである。一方，Cvetkovski は[2, p.21]の Exercise 3.3 で $s \geq 3\sqrt{3}r$ の証明を２種類（Solution 1 と Solution 2）与えていることに，筆者は気付いた。その Solution 2 で Cvetkovski は $\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq s/3$ を用いていることにも気付いた。筆者は，本論文の $2r \leq R$ の証明を，その Solution 2 を読む前に自分で与えた。