岐阜大学教育学部研究報告（自然科学）第34巻，11-25，2010年2月
Sci. Rep. Fac. Educ. Gifu Univ.（Nat. Sci.）34, 11-25, Feb. 2010

マルコフ不定方程式の拡張

Extension of Markoff's Diophantine equation

小島和秀（K. Kojima），畑田一幸（K. Hatada）

Abstract. In Section 1 we explain, in detail, Mordell's result on integral solutions of $x^2+y^2+z^2-axyz=b$. In Section 2, we study integral solutions of $x^2+y^2+z^2+w^2-axyzw=b$ for given integers a and b.

本論文の主要結果は§２の定理２・５と２・６である。

本論文の結果は、第１筆者の小島がすべて与えた。第２筆者の畑田は、第１筆者に、文献[1]と[3]の不定方程式の部分を考察することを勧め、そして、$x^2+y^2+z^2+w^2-axyzw=b$ の整数解の研究を示唆した。

§１．不定方程式 $x^2+y^2+z^2-axyz=b$ の整数解

Mordell[3, pp.106-110]は、マルコフの方程式 $x^2+y^2+z^2=3xyz$ の係数を拡張し、不定方程式 $x^2+y^2+z^2-axyz=b\cdots(1\cdot1)$の整数解についてまとめている。以下に、Mordell の解法について、筆者(小島)が補足しながら紹介する。

定義１・１（Mordell[3, p.107]）

不定方程式(1･1)の解が trivial であるとは、解の２つが０であるときをいう。ただし、このとき b は平方数である。

定理１・２（Mordell[3, p.107]）

不定方程式(1･1)の解 x, y, z について次の操作を施したものも解となる。

① x, y, z の順列。

② x, y, z のうち２つの符号を入れかえたもの。

すなわち $(-x, -y, z), (x, -y, -z), (-x, y, -z)$

③ x を $ayz-x$ 、y を $azx-y$、z を $axy-z$ にそれぞれかえたもの。

特に、これらの操作を**基本操作**と呼ぶ。

証明(Mordell[3, p.107]の説明を筆者(小島)が補足した)

①，②については明らか。

③について例えば $(ayz-x, y, z)$が解であることを示す。

$$(ayz-x)^2+y^2+z^2=x^2+y^2+z^2-2axyz+a^2y^2z^2=-axyz+a^2y^2z^2=ayz(ayz-x),\quad \text{Q.E.D.}$$

定義１・３（Mordell[3, p.107]）

x, y, z を不定方程式(1･1)の基本解とは、$0<x \le y \le z$ かつ どんな基本操作を行っても、それより小さい解の和（高さと呼ぶ）$x+y+z$ にならないものをいう。

Mordell[3, p.107]は、不定方程式(1･1)において $a>0$ として考えてよいとしているが、説明が十分ではないので、筆者(小島)が以下に補足した。

$x^2+y^2+z^2-axyz=b$ であったとき、$x=-x'$ をとると $x'^2+y^2+z^2+ax'yz=b$ となる。

ここで、$a=-a'$ とおくと $x'^2+y^2+z^2-a'x'yz=b$ となる。

このことは、$a>0$ を満たす解に対して、$a'<0$ のときの解が１対１に対応していることを意味する。

したがって、$a>0$ の場合のみを考えれば十分である。

以上のことから、$a>0$ として以下を考えた。

補題１・４（Mordell[3, p.107]）

不定方程式(1･1)に non-trivial な解が存在するとき、それらの解はすべて正としても一般性を失わない。

証明（Mordell[3, p.107]の証明は十分ではないので、筆者(小島)が補足した。）

不定方程式(1･1)の non-trivial な解を x, y, z とする。

解の１つが０のとき

例えば $x=0$ とすれば、基本操作③により、(ayz, y, z) も解となる。この解を改めて (x, y, z) とすれば、これらの解はどれも０でない。他も同様。

解の１つが負、他が正のとき　例えば $x<0$, $y>0$, $z>0$ とすれば、基本操作③より $(ayz-x, y, z)$ も解となる。この解はいずれも正の値であり、この解を改めて (x, y, z) とすれば、これらの解はすべて正となる。他も同様。

解の２つが負、１つが正のとき

例えば $x<0$, $y<0$, $z>0$ とすれば、基本操作②より $(-x, -y, z)$ も解となる。この解はいずれも正の値であり、この解を改めて (x, y, z) とすれば、これらの解はすべて正となる。他も同様。

解が３つとも負のとき

基本操作②より２つの解が正となる。次に基本操作③を行えば３つとも正の解が得られる,

Q.E.D.

これらのことから次の定理が成立する。

定理１・５（Mordell[3, Theorem 7, p.107]）

不定方程式(1･1)が non-trivial な解をもつなら、有限回の基本操作により基本解に帰着する。

不定方程式(1･1)の基本解をみつける目安として、次の定理が成立する。

定理１・６（Mordell[3, Theorem 8, pp.107-108]）

$a>0$, $b>0$ のとき、不定方程式(1･1)の基本解を (x, y, z) とする。ただし、この順に $0<x \le y \le z$ とする。$a=1$, $b=4$ または $a=2$, $b=1$ の場合を除いて、$x^2+y^2 \le b$ が成立する。

証明（Mordell[3, Theorem 8, pp.107-108]の証明は十分ではないので、筆者(小島)が補足した。）

$axy-z<0$ のとき

$(x,y,axy-z)$は(1･1)の解より $x^2+y^2+(axy-z)^2-axy(axy-z)=b$　が成立するから

$x^2+y^2<b$　である。

$axy-z=0$ のとき

同様に考えると　$x^2+y^2=b$ である。

$axy-z>0$ のとき

もし $axy-z<z$ ならば (x,y,z)が基本解であることに反するから

$axy-z\geq z$ すなわち $axy\geq 2z\cdots(1\cdot2)$　となる。

また、$0<x\leq y\leq z$　より(1･1)式から　$x^2+y^2+z^2-axyz\leq 3z^2-axyz$　が成り立つ。

よって　$3z^2-axyz\geq b \Leftrightarrow z(3z-axy)\geq b$　と変形できるから、

$3z-axy>0$　すなわち　$3z>axy\cdots(1\cdot3)$　となる。

(1･2)と(1･3)をあわせると　$\frac{1}{3}axy<z\leq\frac{1}{2}axy\cdots(1\cdot4)$　が成立する。

不定方程式(1･1)を変形すると　$x^2+y^2+(z-\frac{1}{2}axy)^2-\frac{1}{4}a^2x^2y^2=b$　となる。

(1･4)より $-\frac{1}{6}axy<z-\frac{1}{2}axy\leq 0$　ゆえに　$x^2+y^2+\frac{1}{36}a^2x^2y^2-\frac{1}{4}a^2x^2y^2>b$

さらに　$x\leq y$　であるから　$2y^2\left(1-\frac{1}{9}a^2x^2\right)>b$　となる。

したがって、$1-\frac{1}{9}a^2x^2>0$　ゆえに　$ax<3$　が成り立つ。

このことと、a,x が正の整数であることを考えると、この不等式の解は

$(a,x)=(1,1),(1,2),(2,1)$ の3個であることがわかる。

$(a,x)=(1,1)$ のとき

(1･2)より　$y\geq 2z$　であるが、これは最初の条件　$y\leq z$　に矛盾する。

$(a,x)=(1,2)$ のとき

(1･2)より　$y\geq z$　であり、最初の条件　$y\leq z$　とあわせると　$y=z$　となる。

このとき方程式(1･1)より　$4+y^2+z^2-2yz=b \Leftrightarrow (y-z)^2=b-4$　であるから

$y=z$　より　$b=4$　となる。

よって　$a=1,b=4$　の場合　すなわち　不定方程式 $x^2+y^2+z^2-xyz=4\cdots(1\cdot5)$ の基本解は　$(2,y,y)$,　$y\geq 2$　である。

このとき　$x^2+y^2=4+y^2>4=b$　であるから　$x^2+y^2<b$　を満たさない。

特に、$x=2, y=z=1$ も解となることがわかるので

$a=1,b=4$ のとき基本解は　$(2,y,y)$,　$y\geq 2$　と　$(1,1,2)$　である。

$(a,x)=(2,1)$ のとき

(1･2)より　$y\geq z$　であり、最初の条件　$y\leq z$　とあわせると　$y=z$　となる。

このとき方程式(1･1)より　$1+y^2+z^2-2yz=b \iff (y-z)^2=b-1$　であるから
$y=z$　より　$b=1$　となる。
よって　$a=2, b=1$　の場合　すなわち　不定方程式$x^2+y^2+z^2-2xyz=1$の基本解は
$(1, y, y)$　$y \ge 1$　である。
このとき　$x^2+y^2=1+y^2>1=b$　であるから　$x^2+y^2<b$　を満たさない，　Q.E.D.

この定理１・６から、不定方程式$x^2+y^2+z^2-axyz=b$，$a>0, b>0$において、$x^2+y^2<b$を満たすx, yをまず求め、次に、不定方程式$x^2+y^2+z^2-axyz=b$を満たすzを求めれば、基本解x, y, zをみつけられることがわかる。

定理１・７（Mordell[3, Theorem 9, pp.108-109]）
$a>0$，$b>0$のとき、不定方程式(1･1) が non-trivial な解をもつなら、無数の解をもつ。
ただし、$a=1$，$b=2$　の場合を除く。

証明　(Mordell[3, Theorem 9, pp.108-109]の証明は十分ではないので、筆者(小島)が補足した。)
不定方程式(1･1)の non-trivial な解を　(x, y, z)　$x \le y \le z$　とする。

$a=1$，$b=1$のとき　$x^2+y^2+z^2-xyz=1 \cdots (1\cdot 6)$
$(1,1,1)$は解ではないから、$z \ge 2$としてよい。
$x \le y$より　$2x \le zx \le zy$　から　$2x \le zy$　すなわち　$x \le zy-x$　が成り立つ。
仮に、等号が成立したとき、$z=2$となるから(1･6)より
$x^2+y^2-2xy=-3 \iff (x-y)^2=-3$　となるので、解はない。
よって　$x<zy-x$，　$z>2$　が成り立つ。
したがって、解(x, y, z)に対し基本操作③を施した解$(zy-x, y, z)$の高さは、(x, y, z)より大きくなる。
ゆえに、このことを繰り返せば無数の解が構成できる。

$a=1$，$b=2$のとき　$x^2+y^2+z^2-xyz=2 \cdots (1\cdot 7)$
これは$(1,1,1)$を基本解にもつ。
基本操作を施せば、このときの解は$(\pm1, \pm1, 1), (1, -1, 1), (1, -1, -1)$の順列となり、解は有限個である。

$a=1$，$b>2$のとき　$x^2+y^2+z^2-xyz=b \cdots (1\cdot 8)$
$(1,1,1)$は解ではないから、$z \ge 2$としてよい。
$z=2$のとき$(1,1,2), (1,2,2), (2,2,2)$の可能性がある。
$(1,1,2), (2,2,2)$のときは、$b=4$であるから、定理１・５より解は無数に存在する。
$z>2$のとき　$x \le y$より　$2x<zx \le zy$　つまり　$x<zy-x$　ゆえに基本解(x, y, z)に対し基本操作③を施した解$(zy-x, y, z)$の高さは、(x, y, z)より大きくなる。このことを繰り返せば無数の解が構成できる。
$(1,2,2)$のとき、$b=5$であり、$x^2+y^2=1+4=5=b$であるから定理１・５より$(1,2,2)$は基本解であり、基本操作③を施すと、$yz-x=2\cdot 2-1=3>1=x$　から　$z>2$の場合と同様に無数の解が構成できる。

$a=2$，$b=1$のとき　$x^2+y^2+z^2-2xyz=1 \cdots (1\cdot 9)$
定理１・６より解は、　$(1, y, y)$，　$y \ge 1$　であり、無数に構成できる。

$a=2$, $b>1$ のとき　$x^2+y^2+z^2-2xyz=b\cdots(1\cdot 10)$

$(1,1,1)$ は解ではないから、$z\geq 2$ としてよい。

$x\leq y$ より　$2x\leq zx\leq zy<2zy$　から　$2x<2zy$　すなわち　$x\leq 2zy-x$

ゆえに　基本解 (x,y,z) に対し基本操作③を施した解 $(2zy-x,y,z)$ の高さは、(x,y,z) より大きくなるから、このことを繰り返せば無数の解が構成できる。

$a>2$, b が任意のとき

$x\leq y\leq z$　から　$yz\geq x$　より　$ayz\geq ax>2x$　よって　$x<ayz-x$

ゆえに、基本解 (x,y,z) に対し基本操作③を施した解 $(azy-x,y,z)$ の高さは、(x,y,z) より大きくなるから、このことを繰り返せば無数の解が構成できる，　Q.E.D.

これまでの性質を用いて、実際に筆者(小島)が $(1\cdot 1)$ の形の具体的な不定方程式の整数解を求めた。

例１・８

次の不定方程式の整数解を求めよ。ただし、$|x|,\ |y|,\ |z|\leq 1000$　とする。

(1) $x^2+y^2+z^2-4xyz=7$　　(2) $x^2+y^2+z^2-5xyz=11$

(1)　基本解を　(x,y,z), $x\leq y\leq z$　とすると、定理１・６より　$x^2+y^2\leq 7$　であるから

これを満たす正整数は $(x,y)=(1,1),(1,2)$ である。

$(1,1)$ のとき、$1+1+z^2-4z=7$　$\Leftrightarrow$　$z^2-4z-5=0$　から　$z=5,-1$

したがって、解は $(1,1,5),(1,1,-1)$ であるので、基本解は $(1,1,5)$ である。

また、$(1,2)$ のとき、同様にすると　$z^2-8z-2=0$　となるがこれを満たす整数解はない。

以上より、この方程式の基本解は $(1,1,5)$ のみである。

基本操作を用いて条件を満たす解を求めると

$(1,1,5)$ に基本操作③を用いると　$(19,1,5),(1,1,-1)$.

これらに基本操作①を用いると　$(1,5,19),(-1,1,1)$.

次に $(1,5,19)$ に基本操作③を用いると　$(379,5,19),(1,71,19)$.

これらに基本操作①を用いると　$(5,19,379),(1,19,71)$.

次に $(1,71,19)$ に基本操作③を用いると　$(1,265,71)$.

これに基本操作①を用いると　$(1,71,265)$.

また、$(379,5,19)$ に基本操作③を用いると　$(1,989,71)$.

基本操作①により　$(1,71,989)$.

したがって、解は、これら６個の解の順列および基本操作②からどれか２つの符号を負にした解の順列となる。

(2) 基本解を　(x,y,z)　$x\leq y\leq z$　とすると、定理１・６より　$x^2+y^2\leq 11$　であるから

これを満たす正整数は $(x,y)=(1,1),(1,2),(1,3),(2,2)$ である。

それぞれを代入すると

$z^2-5z-9=0$,　$z^2-10z-6=0$,　$z^2-15z-1=0$,　$z^2-20z-3=0$

どれも整数解をもたないので、整数解は存在しない。

さらに、基本解を求める方法を調べるため、解を偶数・奇数に分類して考えた。

ⅰ）(x, y, z)が３つとも奇数のとき

$x^2+y^2+z^2 \equiv 3 \pmod 4$　かつ　$axyz \equiv a \pmod 4$　より　$x^2+y^2+z^2-axyz \equiv 3-a \pmod 4$

ⅱ）(x, y, z)の２つが奇数で１つが偶数のとき

$x^2+y^2+z^2 \equiv 2 \pmod 4$

aが奇数ならば　$axyz \equiv 2 \pmod 4$,　aが偶数なら　$axyz \equiv 0 \pmod 4$

したがって　$x^2+y^2+z^2-axyz \equiv 2, 0 \pmod 4$

ⅲ）(x, y, z)の１つが奇数で２つが偶数のとき

$x^2+y^2+z^2 \equiv 1 \pmod 4$　かつ　$axyz \equiv 0 \pmod 4$　より　$x^2+y^2+z^2-axyz \equiv 1 \pmod 4$

ⅳ）(x, y, z)の３つとも偶数のとき

$x^2+y^2+z^2 \equiv 0 \pmod 4$　かつ　$axyz \equiv 0 \pmod 4$　より　$x^2+y^2+z^2-axyz \equiv 0 \pmod 4$

このことから次の定理が成り立つ。

定理１・９

不定方程式　$x^2+y^2+z^2-axyz \equiv 3 \pmod 4$　が整数解をもつなら　$a \equiv 0 \pmod 4$　である。

特に、その解はすべて奇数である。

この定理１・９を利用して再度例１・８を考察すると

(1) $x^2+y^2+z^2-4xyz=7 \equiv 3 \pmod 4$,　(2) $x^2+y^2+z^2-5xyz=11 \equiv 3 \pmod 4$ である。

(1)は、$a=4 \equiv 0 \pmod 4$ なので、奇数の整数解をもつ。

一方(2)は、$a=5 \equiv 1 \pmod 4$ となるので、整数解をもたないことがわかる。

ただし、この定理の逆は正しくない。２つの例を通してこの定理を考えてみる。

例１・１０

(1)　$x^2+y^2+z^2-8xyz=7$　　　　(2)　$x^2+y^2+z^2-4xyz=151$

これらの不定方程式の整数解はどうなるか。

(1)　$a=8 \equiv 0 \pmod 4$ かつ $b=7 \equiv 3 \pmod 4$　である。

基本解を　(x, y, z),　$x \le y \le z$　とすると、定理１・６より　$x^2+y^2 \le 7$　であるからこれを満たす正整数は、$(x, y)=(1,1), (1,2)$ である。また、定理１・９より整数解があるならそれらはすべて奇数であるから $(x, y)=(1,2)$ は不適である。

よって、$(x, y)=(1,1)$ を代入すると　$z^2-8z-5=0$　となるが、この方程式は整数解をもたない。

ゆえに、不定方程式 $x^2+y^2+z^2-8xyz=7$ は整数解をもたない。

(2)　$a=4 \equiv 0 \pmod 4$ かつ $b=151 \equiv 3 \pmod 4$ である。

基本解を　(x, y, z),　$x \le y \le z$　とすると、定理１・６より $x^2+y^2 \le 151$ であり、定理１・８

より解はすべて奇数であるから、基本解の候補は

$$(x, y) = (1,1), (1,3), (1,5), (1,7), (1,9), (1,11), (3,3), (3,5), (3,7), (3,9), (3,11), (5,5), (5,7), (5,9), (5,11), (7,7), (7,9)$$

である。

これらを不定方程式に代入すると

$(1,1)$のとき$z^2-4z-149=0$，$(1,3)$のとき$z^2-12z-141=0$，

$(1,5)$のとき$z^2-20z-125=0$，$(1,7)$のとき$z^2-28z-101=0$，

$(1,9)$のとき$z^2-36z-69=0$，$(1,11)$のとき$z^2-44z-29=0$，

$(3,3)$のとき$z^2-36z-133=0$，$(3,5)$のとき$z^2-60z-141=0$，

$(3,7)$のとき$z^2-84z-93=0$，$(3,9)$のとき$z^2-108z-61=0$，

$(3,11)$のとき$z^2-132z-21=0$，$(5,5)$のとき$z^2-100z-101=0$，

$(5,7)$のとき$z^2-140z-77=0$，$(5,9)$のとき$z^2-180z-45=0$，

$(5,11)$のとき$z^2-220z-5=0$，$(7,7)$のとき$z^2-196z-53=0$，

$(7,9)$のとき$z^2-252z-21=0$

この中で整数解をもつのは、$(1,5)$のときのみで、

このとき、 $z^2-20z-125=0 \iff (z-25)(z+5)=0$．よって、$z=25,-5$

よって、解$(1,5,25),(1,5,-5)$をもち、基本解は$(1,5,25)$であり、これはnon-trivialな解であるから基本操作により無数の解が得られる。

最後に不定方程式 $x^2+y^2+z^2-axyz=b$ において、$a>0$かつ$b \le 0$のとき、基本解の求め方についてMordell[3, p.109]は、次のように考察している。以下、筆者(小島)が補足し、その結果を紹介する。

$b=-c$ とおくと $c \ge 0$ であり、 $c=axyz-x^2-y^2-z^2$ と表わせる。

ここでnon-trivialな解(x, y, z)が$0<x \le y \le z$で存在したと仮定すると

$$c=axyz-x^2-y^2-z^2 \ge axyz-3z^2=z(axy-3z)$$

が成り立つ。

$axy-3z>0$のとき

$axy-z>2z$ から $axy-z>z$ であるから、基本操作により解は無数に構成でき、(x, y, z)が基本解となる。

また、$axy-3z \ge 1$であるから $0<x \le y \le z \le c$ となる。

したがって、c以下の値を(x, y, z)に代入すればこの解は求められる。

$axy-3z \le 0$のとき

もし $axy-z<z$ なら、有限回の基本操作③により、このnon-trivialな解は基本解に帰着する。

次に$axy-z \ge z$のとき、$axy-3z \le 0$と合わせて $\frac{1}{3}axy \le z \le \frac{1}{2}axy \cdots (1\cdot 10)$ である。

$$x^2+y^2+z^2-axyz=x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}axy\right)^2-\frac{1}{4}a^2x^2y^2=-c$$

と変形し、上記の大小関係を考えると　$x^2+y^2+\frac{1}{36}a^2x^2y^2-\frac{1}{4}a^2x^2y^2\geq -c$

また　$x\leq y$　であるから　$2y^2\left(1-\frac{1}{9}a^2x^2\right)\geq -c\cdots(1\cdot 11)$

仮に、$ax<3$とすれば、$(a,x)=(1,1),(1,2),(2,1)$の場合があり

これを　$x^2+y^2+z^2-axyz=-c$　に代入すると

$(1,1)$のとき　$1+y^2+z^2-yz=-c=\left(y-\frac{1}{2}z\right)^2+\frac{3}{4}z^2+1=-c\leq 0$　より不適。

$(1,2)$のとき　$1+y^2+z^2-2yz=-c=(y-z)^2+1=-c\leq 0$　より不適。

$(2,1)$のとき　$4+y^2+z^2-2yz=-c=(y-z)^2+4=-c\leq 0$　より不適。

したがって、$ax\geq 3$である。

$(1\cdot 11)$を変形して　$2y^2\left(\frac{1}{9}a^2x^2-1\right)\leq c$

もし　$c\neq 0$　ならば　(x,y,z)は上に有界となり、存在するなら基本解はすぐにみつけられる。
$c=0$　のとき　$ax=3$　となるから　$(a,x)=(3,1)$,　$(1,3)$　の場合がある。

$(a,x)=(3,1)$のとき

$(1\cdot 10)$より $y\leq z\leq\frac{3}{2}y \Leftrightarrow -\frac{1}{2}y\leq z-\frac{3}{2}y\leq 0 \Leftrightarrow \left(z-\frac{3}{2}y\right)^2\leq\frac{1}{4}y^2$かつ$z-\frac{3}{2}y\leq 0\cdots(1\cdot 12)$

$1+y^2+z^2-3yz=0 \Leftrightarrow \left(z-\frac{3}{2}y\right)^2=\frac{5}{4}y^2-1\cdots(1\cdot 13)$

$(1\cdot 12)$, $(1\cdot 13)$より　$\frac{5}{4}y^2-1\leq\frac{1}{4}y^2$　から　$y^2\leq 1$　$\therefore y=1$　これと$(1\cdot 12)$から　$z=1$

したがって、基本解は$(1,1,1)$であり、これはマルコフの方程式の基本解である。

$(a,x)=(1,3)$のとき

$9+y^2+z^2-3yz=0 \Leftrightarrow \left(z-\frac{3}{2}y\right)^2=\frac{5}{4}y^2-9\leq\frac{1}{4}y^2 \quad \because(1\cdot 12)$

よって、$y^2\leq 9$　と　$x\leq y\leq z$　から $y=3$　このとき　$3\leq z\leq\frac{9}{2}$　より　$z=3,4$　である

が等式を満たすのは$z=3$

したがって、基本解は$(3,3,3)$である。

以上のことにより、不定方程式$x^2+y^2+z^2-axyz=b$はnon-trivialな解をもつなら、有限回の基本操作により基本解に帰着することがわかる。このことにより、基本解からその他の解が構成していけることがわかる。

§2. 不定方程式$x^2+y^2+z^2+w^2-axyzw=b$の整数解

前節1で説明したMordellが扱った方程式の変数を4個に拡張したものの研究もできるだろうと第2筆者の畑田が示唆した。そこで、不定方程式$x^2+y^2+z^2+w^2-axyzw=b$ (2･1)の整数解について第1筆者の小島が考察した。

定義2・1

不定方程式(2･1)の解がtrivialであるとは、解の２つ以上が０であるときをいう。

定理2・2（**基本操作**）

不定方程式(2･1)の解x,y,z,wについて次の操作を施したものも解となる。

① x,y,z,wの順列

② x,y,z,wのうち２つまたは４つの符号を入れかえたもの。

③ xを$ayzw-x$、yを$azwx-y$、zを$awxy-z$、wを$axyz-w$にそれぞれかえたもの。

証明

①,②については明らか

③について、xを$ayzw-x$にしたものも解になることを示せば十分

$$
\begin{aligned}
(ayzw-x)^2+y^2+z^2+w^2 &= x^2+y^2+z^2+w^2-2axyzw+a^2y^2z^2w^2 \\
&= -axyzw+a^2y^2z^2w^2 \\
&= ayzw(ayzw-x), \qquad \text{Q.E.D.}
\end{aligned}
$$

定義2・3

x,y,z,wを不定方程式(2･1)の基本解とは、$0<x\le y\le z\le w$かつどんな基本操作を行っても、それより小さい解の和（**高さ**と呼ぶ）$x+y+z+w$にならないものをいう。

ここで､不定方程式(2･1)において､§１での考察と同様に　$a>0$　としても一般性を失わない。

定理2・4

不定方程式(2･1)にnon-trivialな解が存在するとき、それらの解はすべて正としても一般性を失わない。

証明

不定方程式(2･1)のnon-trivialな解をx,y,z,wとする。

解の１つが０のとき　例えば$x=0$とすれば、基本操作③により、$(ayzw,y,z,w)$も解となる。この解を改めて(x,y,z,w)とすれば、これらの解はどれも０でない。他も同様。

解の１つが負、他が正のとき　例えば$x<0,y>0,z>0,w>0$とすれば、基本操作③より$(ayzw-x,y,z,w)$も解となる。この解はいずれも正の値であり、この解を改めて(x,y,z,w)

とすれば、これらの解はすべて正となる。他も同様。

解の２つが負、２つが正のとき　例えば$x<0, y<0, z>0, w>0$とすれば、基本操作②より$(-x, -y, z, w)$も解となる。この解はいずれも正の値であり、この解を改めて(x, y, z, w)とすれば、これらの解はすべて正となる。他も同様。

解の３つが負、他が正のとき　基本操作②より２つの解が正となる。次に基本操作③を行えば４つとも正の解が得られる。

解が４つとも負のとき　基本操作②より４つの符号を入れ替えればすべて正となる,

Q.E.D.

定理２・５（基本解の探し方）

$a>0, b>0$のとき、不定方程式(1･1)の基本解を(x, y, z, w)とすると　$x^2+y^2+z^2 \leq b$　が成立する。ただし、基本解はこの順に$0<x \leq y \leq z \leq w$とし、$(a, b)=(1,5),(1,1),(2,2),(3,1)$の場合は除外する。

証明

ⅰ）　$axyz-w<0$のとき

$x^2+y^2+z^2+(axyz-w)^2-axyz(axyz-w)=b$　から　$x^2+y^2+z^2<b$　より成立

ⅱ）　$axyz-w=0$のとき

$x^2+y^2+z^2=b$　より成立

ⅲ）　$axyz-w>0$のとき

$0<axyz-w<w$　なら基本解x, y, z, wより高さの低い解が得られるので矛盾

よって　$axyz-w \geq w$　として考えてよい。

このとき　$\frac{1}{2}axyz \geq w \cdots (2\cdot 2)$

また　$0<x \leq y \leq z \leq w$から

$$b=x^2+y^2+z^2+w^2-axyzw \leq 4w^2-axyzw=w(4w-axyz)$$

$b>0$であるから

$$4w-axyz \geq 0 \quad すなわち \quad w \geq \frac{1}{4}axyz \cdots (2\cdot 3)$$

(2･2),(2･3)をあわせて　$\frac{1}{4}axyz \leq w \leq \frac{1}{2}axyz \cdots (2\cdot 4)$

$$\begin{aligned} b=x^2+y^2+z^2+w^2-axyzw &= x^2+y^2+z^2+\left(w-\frac{1}{2}axyz\right)^2-\frac{1}{4}a^2x^2y^2z^2 \\ &\leq x^2+y^2+z^2+\frac{1}{16}a^2x^2y^2z^2-\frac{1}{4}a^2x^2y^2z^2 \quad (\because (2\cdot 4)) \\ &= x^2+y^2+z^2-\frac{3}{16}a^2x^2y^2z^2 \\ &\leq 3z^2-\frac{3}{16}a^2x^2y^2z^2 \quad (\because 0<x \leq y \leq z) \end{aligned}$$

したがって　$b \leq 3z^2\left(1-\frac{1}{16}a^2x^2y^2\right)$

$b>0$ であるから $1-\frac{1}{16}a^2x^2y^2>0$ よって $axy<4$

ゆえに $(a,x,y)=(1,1,1),(1,1,2),(1,1,3),(2,1,1),(3,1,1)$ の場合が考えられる。

$(1,1,1)$ のとき

(2・2)より $z\geq 2w$ であるが、条件から $z\leq w$ より矛盾する。

$(1,1,2)$ のとき

$1^2+2^2+z^2+w^2-2zw=b \iff (z-w)^2=b-5$

ここで (2・2)より $z\geq w$ であり、条件から $z\leq w$ ゆえに $z=w$ である。

したがって $b=5$

このとき $1^2+2^2+z^2=x^2+y^2+z^2>5=b$ を満たす。

また 基本解は $(1,2,z,z)(z\geq 2)$ または $(1,1,1,2)$ である。

$(1,1,3)$ のとき

$1^2+3^2+z^2+w^2-3zw=b \iff z^2+w^2-3zw=b-10 \cdots (2\cdot 5)$

(2・2)より $\frac{3}{2}z\geq w$ また 条件 $z\leq w$ これらを合わせて $z\leq w\leq \frac{3}{2}z$

(2・5)より $b=\left(w-\frac{3}{2}z\right)^2-\frac{5}{4}z^2+10$

これを w についての2次関数と考えれば $-\frac{5}{4}z^2+10\leq b\leq -z^2+10$

これを z について解くと $\frac{4}{5}(10-b)\leq z^2\leq 10-b$

$z\geq 3$ であるからこの不等式を満たすのは $b=1, z=3$

このとき $1^2+3^2+3^2+w^2-9w=1 \iff w^2-9w+18=0$ これを解くと $w=3,6$

ゆえに 解は$(1,3,3,3),(1,3,3,6)$ である。

ここで $1\cdot 3\cdot 3-3=6$ であり 解$(1,3,3,6)$は基本操作により$(1,3,3,3)$から作られる。

よって 基本解は$(1,3,3,3)$である。

このとき $1^2+3^2+3^2=x^2+y^2+z^2>1=b$ を満たす。

$(2,1,1)$ のとき

$1^2+1^2+z^2+w^2-2zw=b \iff (z-w)^2=b-2$

(2・2)より $z\geq w$ であり 条件から $z\leq w$ ゆえに $z=w$ であるから $b=2$

このとき 基本解は $(1,1,z,z)(z\geq 1)$ であり $1^2+1^2+z^2=x^2+y^2+z^2>2=b$ を満たす。

$(3,1,1)$ のとき

$1^2+1^2+z^2+w^2-2zw=b \iff z^2+w^2-2zw=b-2 \cdots (2\cdot 6)$

(2・2)より $\frac{3}{2}z\geq w$ また 条件 $z\leq w$ これらを合わせて $z\leq w\leq \frac{3}{2}z$

(2・6)より $b=\left(w-\frac{3}{2}z\right)^2-\frac{5}{4}z^2+2$

これをwについての２次関数と考えれば　$-\frac{5}{4}z^2+2\le b\le -z^2+2$

これをzについて解くと　$\frac{4}{5}(2-b)\le z^2\le 2-b$

$z\ge 1$であるからこの不等式を満たすのは　$b=1, z=1$

このとき　$1^2+1^2+1^2+w^2-3w=1 \iff w^2-3w+2=0$　これを解くと　$w=1,2$

ゆえに　解は$(1,1,1,1),(1,1,1,2)$　である。

ここで　$3\cdot 1\cdot 1\cdot 1-1=2$　であり　解$(1,1,1,2)$は基本操作により$(1,1,1,1)$から作られる。

よって　基本解は$(1,1,1,1)$である。

このとき　$1^2+1^2+1^2=x^2+y^2+z^2>1=b$　を満たす,　Q.E.D.

定理２・６

$a>0$, $b>0$のとき、不定方程式(2･1)がnon-trivialな解をもてば、無数の解が存在する。

ただし、$(a,b)=(1,3)$の場合は有限個である。

証明

non-trivialな解を(x,y,z,w)、$x\le y\le z\le w$を満たすものとする。

$a=1$, $b=1$　すなわち　$x^2+y^2+z^2+w^2-xyzw=1$　のとき

定理２・５において、基本解$(1,3,3,3)$をもつことがわかっているので、そのnon-trivialな解は基本操作により基本解に帰着し、また、無数の解を作ることができる。

実際、基本解が$(1,3,3,3)$より$x\ge 1, y, z, w\ge 3$としてよい。

ゆえに　$2x<3x\le wx<wyz$　となるから　$x<yzw-x$　がどの解(x,y,z,w)についても成り立つ。

したがって　基本操作により高さの大きい解をいくつでも作ることができる。

$a=1$, $b=2$　すなわち　$x^2+y^2+z^2+w^2-xyzw=2$　のとき

$(1,1,1,1)$は解ではないから　$w\ge 2$　としてよい。

ゆえに　$2x\le wx<wyz$　となるから　$x<yzw-x$が　どの解(x,y,z,w)についても成り立つ。

したがって　基本操作により高さの大きい解をいくつでも作ることができる。

$a=1$, $b=3$　すなわち　$x^2+y^2+z^2+w^2-xyzw=3\cdots(2\cdot 7)$　のとき

定理２・５より(x,y,z,w)を基本解とすれば、$x^2+y^2+z^2\le 3$である。(2･7)を満たすものは$(1,1,1,1)$のみであるからこれが基本解である。このとき基本操作により得られる解は$(1,1,1,1),(-1,-1,-1,-1),(-1,-1,1,1)$の順列の８個のみである。

$a=1$, $b>3$　すなわち　$x^2+y^2+z^2+w^2-xyzw=b$　のとき

$b>3$　より　$(1,1,1,1)$は解ではないから　$w\ge 2$　としてよい。

ゆえに　$2x\le wx<wyz$　となるから　$x<yzw-x$　がどの解(x,y,z,w)についても成り立つ。

したがって　基本操作により高さの大きい解をいくつでも作ることができる。

$a>2$, $b>0$　すなわち　$x^2+y^2+z^2+w^2-axyzw=b$　のとき

ゆえに　$2x<ax<awyz$　となるから　$x<ayzw-x$　がどの解(x,y,z,w)についても成り立つ。

したがって　基本操作により高さの大きい解をいくつでも作ることができる,　Q.E.D.

最後に不定方程式　$x^2+y^2+z^2+w^2-axyzw=b$　において、$a>0, b\le 0$のとき、基本解の求

め方についてMordellの方法を参考に、第1筆者小島が考察した。

$b=-c$ とおくと $c\geq 0$ であり $c=axyzw-x^2-y^2-z^2-w^2$ と表わせる。

ここでnon-trivialな解(x,y,z,w)が、$0<x\leq y\leq z\leq w$で存在したと仮定すると

$c=axyz-x^2-y^2-z^2-w^2\geq axyzw-4w^2=w(axyz-4z)$

が成り立つ。

$axyz-4w>0$のとき

$axyz-w>3w$ から $axyz-w>w$ であるから、基本操作により解は無数に構成でき、(x,y,z)が基本解となる。

また、$axy-3z\geq 1$であるから $0<x\leq y\leq z\leq w\leq c$ となる。

したがって、c以下の値を(x,y,z,w)に代入すればこの解は求められる。

$axyz-4w\leq 0$のとき

もし $axyz-w<w$ なら、有限回の基本操作③により、このnon-trivialな解は基本解に帰着する。

次に$axyz-w\geq w$のとき、$axyz-4w\leq 0$と合わせて $\frac{1}{4}axyz\leq w\leq\frac{1}{2}axyz\cdots(2\cdot 8)$ である。

$$x^2+y^2+z^2+w^2-axyzw=x^2+y^2+z^2+\left(w-\frac{1}{2}axyz\right)^2-\frac{1}{4}a^2x^2y^2z^2=-c$$

と変形し、$(2\cdot 8)$から $-\frac{1}{4}axyz\leq w-\frac{1}{2}axyz\leq 0$ が成り立つので

$$x^2+y^2+z^2+\frac{1}{16}a^2x^2y^2z^2-\frac{1}{4}a^2x^2y^2z^2\geq -c \quad\Leftrightarrow\quad x^2+y^2+z^2-\frac{3}{16}a^2x^2y^2z^2\geq -c$$

また $x\leq y\leq z$ であるから $3z^2\left(1-\frac{1}{16}a^2x^2y^2\right)\geq -c\cdots(2\cdot 9)$

$axy<4$のとき

$(a,x,y)=(1,1,1),(1,1,2),(1,1,3),(2,1,1),(3,1,1)$の場合があり

これを $x^2+y^2+z^2+w^2-axyzw=-c$ に代入すると

$(1,1,1)$のとき $2+z^2+w^2-zw=-c=\left(z-\frac{1}{2}w\right)^2+\frac{3}{4}w^2+2=-c\leq 0$ より不適

$(1,1,2)$のとき $5+z^2+w^2-2zw=-c=(z-w)^2+5=-c\leq 0$ より不適

$(1,1,3)$のとき $10+z^2+w^2-3zw=-c$

$(2\cdot 8)$より $\frac{3}{4}z\leq w\leq\frac{3}{2}z$ かつ $z\leq w$ よって $z\leq w\leq\frac{3}{2}z$

また 左辺$=\left(w-\frac{3}{2}z\right)^2-\frac{5}{4}z^2+10$ であるから $10-\frac{5}{4}z^2\leq -c\leq 10-z^2$

$-c \geq 0$ よりこれを満たす z,c は有限個であり、存在するなら解は簡単に求められる。

$(2,1,1)$ のとき　$2+z^2+w^2-2zw=-c=(z-w)^2+2=-c\leq 0$　より不適

$(3,1,1)$ のとき　$2+z^2+w^2-3zw=-c$　より $(1,1,3)$ の場合と同様に $2-\dfrac{5}{4}z^2\leq -c\leq 2-z^2$

であるから存在するなら解は簡単に求められる。

$axy\geq 4$ のとき

(2・9)を変形して $3z^2\left(\dfrac{1}{16}a^2x^2y^2-1\right)\leq c$

もし　$c\neq 0$　ならば　(x,y,z,w) は上に有界となり、存在するなら基本解はすぐにみつけられる。
$c=0$　のとき　$axy=4$　となるから　$(a,x,y)=(1,1,4),(1,2,2),(2,1,2),(4,1,1)$　の場合がある。

$(a,x,y)=(1,1,4)$ のとき

(2・8)より　$z\leq w\leq 2z$　また　$17+z^2+w^2-4zw=0$　$\Leftrightarrow$　$(w-2z)^2=3z^2-17$

よって　$0\leq 3z^2-17\leq z^2$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{17}{3}\leq z^2\leq\dfrac{17}{2}$　ゆえに　式を満たす z,w は存在しない。

したがって　このとき解はない。

$(a,x,y)=(1,2,2)$ のとき

(2・8)より　$z\leq w\leq 2z$　また　$8+z^2+w^2-4zw=0$　$\Leftrightarrow$　$(w-2z)^2=3z^2-8$

よって　$0\leq 3z^2-8\leq z^2\Leftrightarrow\dfrac{8}{3}\leq z^2\leq 4$　ゆえに　$z=2$

ゆえに　$w^2-8w+12=(w-2)(w-6)=0$

したがって　このとき解は $(2,2,2,2),(2,2,2,6)$。

ここで　$2\cdot 2\cdot 2-2=6$　であり　解 $(2,2,2,6)$ は基本操作により $(2,2,2,2)$ から作られる。

よって　基本解は $(2,2,2,2)$ である。

$(a,x,y)=(2,1,2)$ のとき

(2・8)より　$z\leq w\leq 2z$　また　$5+z^2+w^2-4zw=0$　$\Leftrightarrow$　$(w-2z)^2=3z^2-5$

よって　$0\leq 3z^2-5\leq z^2$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{5}{3}\leq z^2\leq\dfrac{5}{2}$　よって　このとき　式を満たす z,w は存在しない。

したがって　このとき解はない。

$(a,x,y)=(4,1,1)$ のとき

(2・8)より　$z\leq w\leq 2z$　また　$2+z^2+w^2-4zw=0$　$\Leftrightarrow$　$(w-2z)^2=3z^2-2$

よって　$0\leq 3z^2-2\leq z^2$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{2}{3}\leq z^2\leq 1$　ゆえに　$z=1$

このとき　$w^2-4w+3=(w-1)(w-3)=0$

したがって　このとき解は $(1,1,1,1),(1,1,1,3)$。

ここで　$4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 = 3$　であり　解$(1,1,1,3)$は基本操作により$(1,1,1,1)$から作られる。
よって　基本解は$(1,1,1,1)$である。

以上のことにより、不定方程式$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - axyzw = b$は non-trivial な解をもつなら、有限回の基本操作により基本解に帰着することがわかる。また、基本解からその他の解が構成していけることがわかる。

この結果をさらに一般化していくと、不定方程式$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots\cdots + x_n^2 = nx_1x_2x_3 \cdots x_n$を拡張した不定方程式$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots\cdots + x_n^2 - ax_1x_2x_3 \cdots x_n = b$の整数解も基本解から何回かの基本操作を繰り返せば解が作り出せるであろう。また、trivial でない解が存在する場合には特殊な場合を除いて整数解が無数に存在するであろう。

文献

[1]　L. K. Hua, Introduction to Number Theory, Springer,Berlin-Heidelberg, 1982

[2]　小島和秀（K.Kojima),
修士論文:不定方程式に関する整数・有理数の研究,岐阜大学大学院教育学研究科,
2009 年 3 月.

[3]　L.J.Mordell, Diophantine Equations, Academic Press, New York, London, 1969.

小島和秀（Kojima　Kazuhide）
岐阜大学大学院教育学研究科数学教育専修
現在の所属：岐阜県立加茂高等学校
　　　　　　岐阜県美濃加茂市本郷町２丁目

畑田一幸（Hatada　Kazuyuki）
岐阜大学教育学部数学教室
岐阜県岐阜市柳戸１番１