岐阜大学教育学部研究報告　教育実践研究・教師教育研究　第19巻（2017），21-30

多変数の不等式について

On Inequalities of Several Variables

畑田 一幸（Kazuyuki HATADA）[1]，　西 巧（Takumi NISHI）[2]

[1] 岐阜大学教育学部数学教室

[2] 岐阜大学大学院教育学研究科総合教科教育サイエンスコース数学領域

〒５０１－１１９３　岐阜県岐阜市柳戸１－１

Gifu University,　Department of Mathematics,

1-1, Yanagido, Gifu City, GIFU 501-1193, Japan

MSC Number:　26D15.

Key words and phrases:　inequalities,　sums,　real numbers.

要旨.　$a_i > 0$　$(i = 1,2,\cdots,n)$　，$x_i \geq 0$　$(i = 1,2,\cdots,n)$とし，$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$とおく。$\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j a_j}{s_n - a_j}$ と $\sum_{j=1}^{n} \frac{s_n - a_j}{x_j a_j}$ の最小値を与える。　$\mathrm{T} = \{(i,j) \in \boldsymbol{Z}^2 \mid 1 \leq i < j \leq 5\}$とし，

$\sum_{(i,j)\in T} \frac{(a_i + a_j)^p}{(s - a_i - a_j)^p} + \sum_{(i,j)\in T} \frac{(s - a_i - a_j)^p}{(a_i + a_j)^p}$　（ここで$p \geq 1$，$\mathrm{s} = s_n$，$n = 5$）　の最小値を与える。

$\left(\frac{c}{a+b}\right)^p + \left(\frac{a}{b+c}\right)^p + \left(\frac{b}{c+a}\right)^p + \left(\frac{a+b}{c}\right)^p + \left(\frac{b+c}{a}\right)^p + \left(\frac{c+a}{b}\right)^p$　（ここでa, b, c, pは正の実数 ）の最小値を与える。$(a+b)^p(c+d)^p + (a+c)^p(b+d)^p + (a+d)^p(b+c)^p$　（ここでa, b, c, dは　$a+b+c+d = 1$　を満たす正の実数で，　$0 < p \leq 1$）　の最大値を与える。

Abstract.　Let $a_i > 0$　$(i = 1,2,\cdots,n)$　，$x_i \geq 0$　$(i = 1,2,\cdots,n)$，$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$　. We give minimum values of $\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j a_j}{s_n - a_j}$ and $\sum_{j=1}^{n} \frac{s_n - a_j}{x_j a_j}$　. Letting $\mathrm{T} = \{(i,j) \in \boldsymbol{Z}^2 \mid 1 \leq i < j \leq 5\}$, we give the minimum value of $\sum_{(i,j)\in T} \frac{(a_i + a_j)^p}{(s - a_i - a_j)^p} + \sum_{(i,j)\in T} \frac{(s - a_i - a_j)^p}{(a_i + a_j)^p}$　（where $p \geq 1$，$\mathrm{s} = s_n$，$n = 5$）.　We give the minimum value of

$\left(\frac{c}{a+b}\right)^p+\left(\frac{a}{b+c}\right)^p+\left(\frac{b}{c+a}\right)^p+\left(\frac{a+b}{c}\right)^p+\left(\frac{b+c}{a}\right)^p+\left(\frac{c+a}{b}\right)^p$ （$a>0, b>0, c>0, p>0$ ）.

We give the maximum value of $(a+b)^p(c+d)^p+(a+c)^p(b+d)^p+(a+d)^p(b+c)^p$ （$a>0, b>0, c>0, d>0$，$a+b+c+d=1$，$0<p\leq 1$）.

下記の命題１，２，３，４は西(Nishi)の与えた結果である。下記の命題５，６，７は畑田(Hatada)が与えた結果である。

Ⅰ.

Cvetokovski [1, Ex5.11]に、下記の命題３で各正数 $x_i=1$ で$n=6$の場合が、 AM-GM 不等式と Point of Incidence を用いた方法で与えられている。本論文の、下記命題１，２，３において、それを任意の正整数nと任意の正数 $x_i\geq 0$ （$i=1,2,\cdots,n$） に対し拡張し、コーシー・シュワルツ不等式を用いた別証明を与える。命題１のa_i達と x_i達 にそれぞれ増大関係をつけたときの結果が命題４である。

$n\geq 2$ ，$a_i>0$ （$i=1,2,\cdots,n$） ，$x_i\geq 0$ （$i=1,2,\cdots,n$）とし，$s_n=\sum_{i=1}^n a_i$とおく。

命題１

$$\sum_{j=1}^n \frac{x_j a_j}{s_n-a_j}\geq \frac{1}{n-1}\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots\cdots+\sqrt{x_n}\right)^2-(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$

であり，等号成立は$\frac{s_n-a_i}{\sqrt{x_i}}=\frac{s_n-a_j}{\sqrt{x_j}}$ （$1\leq \forall i\leq n,\ 1\leq \forall j\leq n$） の時のみである。

(命題１の証明)

$$\sum_{j=1}^n \frac{x_j a_j}{s_n-a_j}=\frac{x_1a_1}{s_n-a_1}+\frac{x_2a_2}{s_n-a_2}+\cdots\cdots+\frac{x_na_n}{s_n-a_n}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\frac{x_1}{s_n-a_1}+\frac{x_2}{s_n-a_2}+\cdots\cdots+\frac{x_n}{s_n-a_n}\right)$$
$$-(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$

であり

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{n-1}\{(s_n-a_1)+(s_n-a_2)+\cdots\cdots+(s_n-a_n)\}$$

より，コーシー・シュワルツの不等式を用いて

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{x_1}{s_n-a_1}+\frac{x_2}{s_n-a_2}+\cdots\cdots+\frac{x_n}{s_n-a_n}\right)$$

$$\geq \frac{1}{n-1}\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots\cdots+\sqrt{x_n}\right)^2 .$$

よって

$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j a_j}{s_n-a_j} \geq \frac{1}{n-1}\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots\cdots+\sqrt{x_n}\right)^2-(x_1+x_2+\cdots+x_n)$を得る。

等号成立はコーシー・シュワルツの不等式より

$\frac{s_n-a_i}{\sqrt{x_i}}=\frac{s_n-a_j}{\sqrt{x_j}}$ $(1\leq\forall i\leq n,\ 1\leq\forall j\leq n)$　の時のみである。

命題 2

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{s_n-a_j}{x_j a_j} \geq (n-1)n\left(\frac{1}{x_1x_2\cdots\cdots x_n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

であり，等号成立は　$a_i=a_j$かつ$x_i=x_j$　$(1\leq\forall i\leq n,\ 1\leq\forall j\leq n)$　の時のみである。

(命題 2 の証明)

AM≥ GMより

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{s_n-a_j}{x_j a_j}=\frac{a_2}{x_1a_1}+\frac{a_3}{x_1a_1}+\cdots+\frac{a_n}{x_1a_1}+\frac{a_3}{x_2a_2}+\cdots+\frac{a_1}{x_2a_2}+\cdots\cdots+\frac{a_{n-1}}{x_na_n}$$

$$\geq (n-1)n\left(\frac{a_2}{x_1a_1}\times\frac{a_3}{x_1a_1}\times\cdots\times\frac{a_n}{x_1a_1}\times\frac{a_3}{x_1a_2}\times\cdots\times\frac{a_1}{x_2a_2}\times\cdots\cdots\times\frac{a_{n-1}}{x_na_n}\right)^{\frac{1}{(n-1)n}}$$

$$\geq (n-1)n\left(\left(\frac{1}{x_1x_2\cdots\cdots x_n}\right)^{n-1}\right)^{\frac{1}{(n-1)n}}=(n-1)n\left(\frac{1}{x_1x_2\cdots\cdots x_n}\right)^{\frac{1}{n}} .$$

等号成立は AM≥ GMより

$\frac{a_2}{x_1a_1}=\frac{a_3}{x_1a_1}=\cdots=\frac{a_n}{x_1a_1}=\frac{a_3}{x_2a_2}=\cdots=\frac{a_1}{x_2a_2}=\cdots\cdots=\frac{a_{n-1}}{x_na_n}$　である。

すなわち等号成立は　$a_i=a_j$かつ$x_i=x_j$　$(1\leq\forall i\leq n,\ 1\leq\forall j\leq n)$の時のみである。

命題 3

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j a_j}{s_n-a_j}+\sum_{j=1}^{n}\frac{s_n-a_j}{x_j a_j}$$

$$\geq \frac{1}{n-1}\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots\cdots+\sqrt{x_n}\right)^2-(x_1+x_2+\cdots+x_n)+(n-1)n\left(\frac{1}{x_1x_2\cdots\cdots x_n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

であり，等号成立は　$a_i=a_j$かつ$x_i=x_j$　$(1\leq \forall i\leq n,\ 1\leq \forall j\leq n)$　の時のみである。

（命題 3 の証明）

命題 1 と命題 2 より従う。

命題 3 で$n=4$　かつ$x_i=1$　$(1\leq \forall i\leq n)$　の場合が，［1, Exercise 5.11］である。
[1, Exercise 5.11]では，命題 1 と 2 を用いずに, point of incidence を用いている。

命題 4． $n\geq 2$ とする。$a_i>0$　$(i=1,2,\cdots,n)$　しかも　$a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n$，
$x_i\geq 0$　$(i=1,2,\cdots,n)$　しかも $x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_n$ とする。　$s_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$とおく。このとき

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j a_j}{s_n-a_j}\geq\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n-1}$$

が成立する。

（命題 4 の証明）

$a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n$より，$\dfrac{1}{s_n-a_1}\leq\dfrac{1}{s_n-a_2}\leq\cdots\leq\dfrac{1}{s_n-a_n}$

よって，$\frac{a_1}{s_n-a_1}\leq\frac{a_2}{s_n-a_2}\leq\cdots\leq\frac{a_n}{s_n-a_n}$　かつ　$\frac{x_1}{s_n-a_1}\leq\frac{x_2}{s_n-a_2}\leq\cdots\leq\frac{x_n}{s_n-a_n}$．　文献[1]の
Theorem 10.2 を用いて

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j a_j}{s_n-a_j}\geq\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)(a_1+a_2+\cdots+a_n)}{\sum_{j=1}^{n}(s_n-a_j)}$$

$$\geq\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)(a_1+a_2+\cdots+a_n)}{(n-1)(a_1+a_2+\cdots+a_n)}$$

$$\geq\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n-1}$$

を得る。

この結果は命題 1 よりも良いが，　それは，　命題 1 と違い，　a_i達と x_i達 にそれぞれ増大関係をつけたためである。

Ⅱ.
$p-$乗冪の数の和に関する不等式を扱う。

命題５．　a_1, a_2, a_3, a_4, a_5を各々正の実数で，かつ$p \geq 1$とする。
$s = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$とおき，$T = \{(i,j) \in \boldsymbol{Z}^2 \mid 1 \leq i < j \leq 5\}$とおく。

$$X = \sum_{(i,j)\in T} \frac{(a_i+a_j)^p}{(s-a_i-a_j)^p} + \sum_{(i,j)\in T} \frac{(s-a_i-a_j)^p}{(a_i+a_j)^p}$$

とおくと

$$X \geq 10 \times \left(\frac{2}{3}\right)^p + 10 \times \left(\frac{3}{2}\right)^p$$

が成立し，等号成立は$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5$の時のみである。

補題 1.　命題５の条件の下で

$$\sum_{(i,j)\in T} \frac{s-a_i-a_j}{a_i+a_j} \geq 15$$

が成立する。この≤で＝が成立するのは$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5$の時のみである。

(補題 1 の証明)

$$\left(\sum_{(i,j)\in T} \frac{s}{a_i+a_j}\right) - 10 = s\left(\sum_{(i,j)\in T} \frac{1}{a_i+a_j}\right) - 10$$

AM≥ HM より

$$\left(\frac{1}{10}\left(\sum_{(i,j)\in T} \frac{1}{a_i+a_j}\right)\right)^{+1} \geq \left(\frac{1}{10}\left(\sum_{(i,j)\in T} (a_i+a_j)\right)\right)^{-1}.$$

すなわち

$$\sum_{(i,j)\in T} \frac{1}{a_i+a_j} \geq \frac{100}{\sum_{(i,j)\in T}(a_i+a_j)} = \frac{100}{4s} = \frac{25}{s}$$ を得る。

ゆえに

$$\sum_{(i,j)\in T}\frac{s-a_i-a_j}{a_i+a_j}\geq 25-10=15\ .$$

等号の成立はAM≥ HMで等号成立の場合であるから，補題１は証明された。

（命題５の証明）

$$X=\sum_{(i,j)\in T}\frac{\left(a_i+a_j\right)^p}{\left(s-a_i-a_j\right)^p}+\sum_{(i,j)\in T}\frac{\left(s-a_i-a_j\right)^p}{\lambda\left(a_i+a_j\right)^p}+\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\left(\sum_{(i,j)\in T}\frac{\left(s-a_i-a_j\right)^p}{\left(a_i+a_j\right)^p}\right)$$
と変形する。

AM≥ GMに関する point of incidence の考え方（[1, p.53]参照）により

$\lambda=\left(\frac{9}{4}\right)^p$ とおくことができる。

$p\geq 1$ の時，power mean inequality（see e.g. [2, pp. 2-5] and [3, pp. 226-230]）により

$$\left(\frac{\sum_{(i,j)\in T}\frac{\left(s-a_i-a_j\right)^p}{\left(a_i+a_j\right)^p}}{10}\right)^{\frac{1}{p}}\geq\frac{\sum_{(i,j)\in T}\frac{s-a_i-a_j}{a_i+a_j}}{10}\ .$$

よって次を得る。

$$\sum_{(i,j)\in T}\frac{\left(s-a_i-a_j\right)^p}{\left(a_i+a_j\right)^p}\geq 10\times\left(\frac{1}{10}\left(\sum_{(i,j)\in T}\frac{s-a_i-a_j}{a_i+a_j}\right)\right)^p=10^{1-p}\times 15^p\ .\qquad(\text{補題 }1)$$

Xに AM $\geq GM$を用いて，$\lambda=\left(\frac{9}{4}\right)^p$ に注意して

$$\mathrm{X}\geq 20\times\sqrt[20]{\frac{1}{\lambda^{10}}}+\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)10^{1-p}\times 15^p$$

$$=20\lambda^{-\frac{1}{2}}+\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\times 10\times\left(\frac{3}{2}\right)^p$$

$$=10\times\left(\frac{2}{3}\right)^p+10\times\left(\frac{3}{2}\right)^p\ .$$

等号成立は AM≥ GMを用いているので，　$a_1=a_2=a_3=a_4=a_5$の時のみである。
よって命題５が証明された。

Remark 1.　命題５は５変数以上の場合にも拡張可能である。

命題６．　a, b, c, pをそれぞれ正の実数とする。

$$\mathrm{K} = \left(\frac{c}{a+b}\right)^p + \left(\frac{a}{b+c}\right)^p + \left(\frac{b}{c+a}\right)^p + \left(\frac{a+b}{c}\right)^p + \left(\frac{b+c}{a}\right)^p + \left(\frac{c+a}{b}\right)^p$$

とおく。このとき

$$\mathrm{K} \geq 3 \times 2^{-p} + 3 \times 2^p$$

が成立し，ここで=が成立するのは$a = b = c$の時のみである。

(命題６の証明)

（ｉ）$p \geq 1$ の場合:　$\lambda > 0$ とする。

$$\begin{aligned}\mathrm{K} = &\left(\frac{c}{a+b}\right)^p + \left(\frac{a}{b+c}\right)^p + \left(\frac{b}{c+a}\right)^p \\ &+ \frac{1}{\lambda}\left(\left(\frac{a+b}{c}\right)^p + \left(\frac{b+c}{a}\right)^p + \left(\frac{c+a}{b}\right)^p\right) \\ &+ \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\left(\left(\frac{a+b}{c}\right)^p + \left(\frac{b+c}{a}\right)^p + \left(\frac{c+a}{b}\right)^p\right). \qquad (6.1)\end{aligned}$$

と変形する。最初の 6 個の項に AM≥ GMを適用する。

残りの 3 個の項には power mean inequality([2] and [3])を適用した後で

AM ≥ GMを適用する。

$$\left(\frac{1}{3}\left(\left(\frac{a+b}{c}\right)^p + \left(\frac{b+c}{a}\right)^p + \left(\frac{c+a}{b}\right)^p\right)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\geq \frac{1}{3}\left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}\right)$$

$$\geq \left(\frac{a+b}{c} \cdot \frac{b+c}{a} \cdot \frac{c+a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\geq \left(\frac{2\sqrt{ab}}{c} \cdot \frac{2\sqrt{bc}}{a} \cdot \frac{2\sqrt{ca}}{b}\right)^{\frac{1}{3}} = 2\,.$$

すると，K≥ $6 \times \left(\lambda^{-3}\right)^{\frac{1}{6}} + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \times 3 \times 2^p$を得る。

ここで = は$a = b = c$の時のみ成立する。

point of incidenceの考え方([1, p. 53]参照)を K の最初の 6 項に適用すれば$\lambda = 4^p$となる。

以後，$\lambda = 4^p$とする。すると

K≥ $6 \times 2^{-p} + 3(1 - 2^{-2p}) \times 2^p = 3 \times 2^{-p} + 3 \times 2^p$が得られた。

ここでの $=$ の成立は，上記のすべての $\geq$ で $=$ が成立することが必要十分なので $a=b=c$の場合に限る。

（ⅱ） $0<p<1$ の場合:　 $\lambda>0$ とする。
上記の$p\geq 1$ の場合の変形を用いる。すなわち，K の(6.1)の表示を用いる。
最初の 6 個の項に $\mathrm{AM}\geq GM$を用いる。

$$K\geq 6\left(\frac{1}{\lambda^{3}}\right)^{\frac{1}{6}}+\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\left(\left(\frac{a+b}{c}\right)^{p}+\left(\frac{b+c}{a}\right)^{p}+\left(\frac{c+a}{b}\right)^{p}\right)$$

$$=6\lambda^{-\frac{1}{2}}+3\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\left(\frac{1}{3}\left(\left(\frac{a+b}{c}\right)^{p}+\left(\frac{b+c}{a}\right)^{p}+\left(\frac{c+a}{b}\right)^{p}\right)\right).$$

を得る。ここの$\geq$ で $=$ が成立するのは$a=b=c$の時に限る。
point of incidence（[1, p.53]参照）を最初の 6 項に適用すると，$\lambda=4^{p}$を得る。
以後，$\lambda=4^{p}$とする。

$L=\frac{1}{3}\left(\left(\frac{a+b}{c}\right)^{p}+\left(\frac{b+c}{a}\right)^{p}+\left(\frac{c+a}{b}\right)^{p}\right)$とおく。

このとき，$L=\frac{1}{3}\left(\left(\frac{c}{a+b}\right)^{-p}+\left(\frac{a}{b+c}\right)^{-p}+\left(\frac{b}{c+a}\right)^{-p}\right)$である。

ここでpower mean inequalities ([2], [3]を参照)を用いる。
$a+b\geq 2\sqrt{ab}$，　$b+c\geq 2\sqrt{bc}$，　$c+a\geq 2\sqrt{ca}$も用いる。

$$L^{-\frac{1}{p}}\leq\left(\frac{c}{a+b}\cdot\frac{a}{b+c}\cdot\frac{b}{c+a}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\leq\left(\frac{a\cdot b\cdot c}{2^{3}\cdot\sqrt{a^{2}b^{2}c^{2}}}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}.$$

を得る。この$L^{-\frac{1}{p}}\leq\frac{1}{2}$で，$=$ の成立は$a=b=c$の時のみに限る。故に

$L=\left(L^{-\frac{1}{p}}\right)^{-p}\geq(2^{-1})^{-p}=2^{p}$が成立し，$=$ は$a=b=c$の時に限る。

$\mathrm{K}\geq 6\lambda^{-\frac{1}{2}}+3\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\mathrm{L}$ かつ $\lambda=4^{p}$であった。

$$6\lambda^{-\frac{1}{2}}+3\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\mathrm{L}=6\times 2^{-p}+3(1-4^{-p})\mathrm{L}$$

$$\geq 6\times 2^{-p}+3(1-4^{-p})\times 2^{p}$$

$$=3\times 2^{-p}+3\times 2^{p}.$$

が成立し，$\geq$ で $=$ が成立するのは$a=b=c$の時のみに限ることがわかった。

(ⅰ)と(ⅱ)より命題６は証明された。

Remark　2.

命題６の３変数a,b,cを$n(\geq 4)$変数の　$a_1>0$,　$a_2>0$,　……,　$a_n>0$に
拡張することも可能である。すなわち,
$s_n=\sum_{j=1}^{n} a_j$とおき，$p>0$で

$$K_n=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{s_n-a_i}\right)^p+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{s_n-a_i}{a_i}\right)^p$$

とおく。このとき

$$K_n \geq n((n-1)^p+(n-1)^{-p})$$

が成立し，この$\geq$において，$=$は$a_1=a_2=a_3=\cdots\cdots=a_n$の時のみ成立する。

上記の命題５と６は，命題３で$x_i=1$　$(1\leq \forall i\leq n)$　の場合の，$p-$乗冪の数の和への, 2種類の一般化と見ることができる。

命題７． a,b,c,d　を$a+b+c+d=1$ を満たす正の実数で，　$0<p\leq 1$とする。I_pを

$$I_p=(a+b)^p(c+d)^p+(a+c)^p(b+d)^p+(a+d)^p(b+c)^p$$

により定める。このとき　$I_p\leq \dfrac{3}{4^p}$　が成立し，ここで等号の成立は$a=b=c=d=\dfrac{1}{4}$の場合に限る。

（命題７の証明）

(7.1)　　$p=1$　の場合の証明。Lagrange の乗数法を適用する。

$$2(b+c+d)=\lambda$$
$$2(a+c+d)=\lambda$$
$$2(a+b+d)=\lambda$$
$$2(a+b+c)=\lambda$$
$$a+b+c+d=1$$

より，　I_1の最大値は　$a=b=c=d=\dfrac{1}{4}$　かつ　$\lambda=\dfrac{3}{2}$　の場合に限ることが分かる。

そして　I_1 の最大値$=\dfrac{3}{4}$　も得られた。

(7.2)　$0<p<1$　の場合の証明。　p -th power means inequality ([2], [3]　参照)を用いる。

$$I_p = 3(((a+b)^p(c+d)^p + (a+c)^p(b+d)^p + (a+d)^p(b+c)^p)/3)$$

より

$$I_p{}^{1/p} = 3^{1/p}(((a+b)^p(c+d)^p + (a+c)^p(b+d)^p + (a+d)^p(b+c)^p)/3)^{1/p}$$

と変形して p -th power means inequality を用いる。

$$I_p{}^{1/p} \le 3^{1/p} \times 3^{-1} I_1$$

を得る。ここで等号は $(a+b)(c+d)=(a+c)(b+d)=(a+d)(b+c)$ の時のみ成立する。

さらに(7.1)の結果を用いる。$I_p{}^{1/p} \le 3^{1/p} \times 3^{-1} I_1 \le 3^{1/p} \times 3^{-1} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{3^{1/p}}{4}$ を得る。(7.1)の結果により，　$I_p{}^{1/p} = \dfrac{3^{1/p}}{4}$ となるのは $a=b=c=d=\dfrac{1}{4}$ の時のみである。以上より　$I_p \le \dfrac{3}{4^p}$　が成立し，しかも，　ここで等号の成立は $a=b=c=d=\dfrac{1}{4}$ の場合に限ることが，　証明された。

(7.1)と(7.2)により，　命題７は証明された。

文献

[1]　Z. Cvetkovski,　Inequalities,　Springer,　Berlin, Heidelberg, 2012

[2]　K. Hatada,　Limits of recursive sequences of means for several numbers, Far East J. Math. Sci., Vol. 49(1), pp. 1-6, 2011.

[3]　K. Hatada,　Limits of recursive sequences of means for several numbers, II,　Far East J. Math. Sci., Vol. 59(2), pp. 221-230, 2011.