岐阜大学教育学部研究報告　教育実践研究　第18巻（2016），35-39

有限集合間の写像

Mappings between Finite Sets

畑田　一幸（Kazuyuki HATADA）
岐阜大学教育学部数学教室
〒５０１－１１９３　岐阜県岐阜市柳戸１－１
Gifu University, Department of Mathematics, Faculty of Education,
1-1, Yanagido, Gifu City, GIFU 501-1193, Japan

要旨．　次のよく使われる命題に関して，　証明は易しく，　学生も直ぐに解答できると思っていたところ，　意外にも，　正しく解答できる学生は殆どいなかった。略解を教えても，　正しく解答できる学生は殆どいなかった。　ここでは，　その理由を考察する。
命題１．　A が有限集合であるとき，　写像 $f:A\to A$ は次の条件のいずれかを満たせば全単射である。　(i)　f は単射.　　　　(ii)　f は全射.

Abstract.　The following proposition is easy to prove. But many students cannot prove this even if we give them a way to prove it. We consider why many of them cannot prove it.
Proposition 1. Let A be a finite set, and let $f:A\to A$ be a mapping that is either injective or surjective. Then $f:A\to A$ is bijective.

１．　学生が上記の命題を証明することが困難な理由の考察

永尾 汎 著，　代数学，　朝倉書店，　東京都新宿区，1983 年　（初版第１刷）は，大学生用の代数学の基礎的な教科書である。その第３頁に問 1.1 として上記の命題が書かれていて，　その略解が第 178 頁に次のように書かれている。
略解．(i)の場合．$|A|=|f(A)|$ であるから，$f(A)=A$。

(ii)の場合．$|A|=\sum_{a\in A}|f^{-1}(a)|$，$|f^{-1}(a)|\geq 1$ より $|f^{-1}(a)|=1$ $(\forall a\in A)$。

多くの学生は，この略解を読んでも，(i)の場合，なぜ $f(A)=A$ となるのか分からない，そして(ii)の場合，なぜ $|f^{-1}(a)|=1$ $(\forall a\in A)$ となるのか分からないと，言う。
（Remark.　上記の $f^{-1}(a)$ は正確には $f^{-1}(\{a\})$ と書かれるべきである。）

以下その理由を考えてみる。

初めて代数学を学ぶ学生は，以下に記すことを知らないと思われる。
これらは，自然数に関する基本性質で知っておくべきものである。

1. 集合論のツェルメロ-フレンケル公理系。
2. 後者集合の定義と，上記公理系の中の無限の公理。
3. 最小の後者集合， 即ち， 自然数全体の集合 ω の定義とその存在性。（$\omega \ni 0 = \emptyset$ となる。$\omega \ni 1 = \{0\}$ である。）
4. ω の要素を自然数と呼び，各々の自然数も集合であること。
5. 「集合が有限集合である」は，その集合と或る自然数との間に少なくとも１つの全単射な写像が存在することであると定義されること。
6. 集合 A と自然数 m の間に全単射な写像が存在し，かつ，その集合 A と自然数 n の間に全単射な写像が存在すれば， $m = n$ が成立するという定理。
7. 有限集合 A に対し，第 6 項によって唯一つに定まる自然数を， $|A|$ と書き， これを有限集合 A の要素の個数と呼ぶこと。
8. 任意の自然数 n の如何なる真部分集合から n への全単射な写像は，一つも存在しないという定理。
9. X を任意の自然数 n の任意の真部分集合とする。このとき $n \ni m$ を満たす或る自然数 m と m から X への全単射な写像が存在するという定理。
10. n と m をそれぞれ任意の自然数とする。このとき $n \ni m$ または $n = m$ または $m \ni n$ のいずれかひとつのみが成立するという定理。 $n \ni m$ を通常 $n > m$ または $m < n$ と書く。（$m < n$ を， m は n より小さい，または， n は m より大きいと読む。）
11. n と m をそれぞれ任意の自然数とする。このとき $n \ni m$ であることと，($n \supset m$ かつ $m \neq n$) であることは，互いに必要十分であるという定理。

これらを，筆者（畑田）は代数学Ⅱの授業で証明をつけて説明している。

さて命題１の(i)の場合を，これらを用いて，証明する。
$|A| = n$ と書く。$f(A)$ は集合になる。$f(A) \subset A$ である。 $f(A) \neq A$ と仮定する。 $f(A)$ と全単射な自然数 m が一意的に存在する。$n \ni m$ となる。f は単射だったので $n = m$ である。矛盾が得られた。ゆえに $f(A) = A$ である。 f は全射となった。故に f は全単射である。

さて命題１の(ii)の場合も，これらを用いて，証明する。
f は全射故，各々の元 $x \in A$ に対し， $f^{-1}(\{x\}) \neq \emptyset$ なので， $f^{-1}(\{x\})$ から，ひとつ，元を選ぶことができる。（$\leftarrow$ その証明には $|A|$ に関する数学的帰納法を用いればよい。）

それをa_xと書く。　よって，単射な写像$g:A\to A$で$g(x)=a_x$　（$\forall x\in A$）を満たすものが存在する。gの像をBと書く。$B\subset A$である。　gが単射なので，$|A|=|B|$である。もし，$B\neq A$ならば，$B\subset A$なので，$|A|>|B|$となる。矛盾である。よってgは全単射になる。よって$B=A$である。元$y\in A$に対し，$f^{-1}(\{y\})\neq\varnothing$なので，　$f^{-1}(\{y\})$から好き勝手な元λ_yをとる。$B=A$なので，$a_z=\lambda_y$となる$z\in A$が存在する。$a_z=\lambda_y\in f^{-1}(\{z\})\bigcap f^{-1}(\{y\})$である。$z\neq y$ならば$f^{-1}(\{z\})\bigcap f^{-1}(\{y\})=\varnothing$なので，$z=y$かつ$\lambda_y=a_y$を得る。即ち，$f^{-1}(\{y\})=\{a_y\}$（$\forall y\in A$）を得る。これは，$f$が単射であることを示している。故に$f$は全単射である。
（読者は，筆者の与えた(ii)のこの証明には加法を用いていないことに注意されたい。）

命題１の(ii)の別解も与えよう。

$\bigcup_{x\in A}f^{-1}(\{x\})$　はdisjoint unionである。各々の$f^{-1}(\{x\})$からひとつずつ元を選べる。（$\leftarrow$　その証明には$|A|$に関する数学的帰納法を用いればよい。）それをa_xと書く。
$\exists y\,(y\in A\ \text{and}\ \{a_y\}\neq f^{-1}(\{y\}))$　と仮定する。すると$\bigcup_{x\in A}f^{-1}(\{x\})$　はdisjoint unionなので

$$\bigcup_{x\in A}\{a_x\}\neq\bigcup_{x\in A}f^{-1}(\{x\})=A\quad\text{and}\quad\bigcup_{x\in A}\{a_x\}\subset\bigcup_{x\in A}f^{-1}(\{x\})$$

となる。よって$\bigcup_{x\in A}\{a_x\}$は有限集合でしかも$|\bigcup_{x\in A}\{a_x\}|<|A|$となる。一方，写像$g:A\to A$，$g(x)=a_x$（$\forall x\in A$）は単射である。よって$|\bigcup_{x\in A}\{a_x\}|=|A|$である。矛盾が得られた。　故に$\forall x\,(x\in A\Rightarrow\{a_x\}=f^{-1}(\{x\}))$が成立する。$f$は単射となり，(ii)の仮定（$f$は全射）と合わせて$f$は全単射となる。(ii)の別解完了。

命題１の証明には，上記１から11の項目を知っていることが必要であると読者に理解してもらえたと思う。

（i）の略解（p. 178）では，有限集合の定義が書かれていないし，$|\bullet|$が何を表すのかも，書かれていないし，$|A|=|f(A)|$から，$f(A)=A$が導かれることの説明もない。

（ii）の略解（p. 178）では，自然数の加法が使われているが，自然数の加法の定義が与えられていないし，$|A| = \sum_{a\in A} |f^{-1}(\{a\})|$ から $|f^{-1}(\{a\})| = 1$ を示すこともなされていない。

これらの略解を見て学生が理解できないと言うのは，正当な理由があると言えよう。

2．　自然数の加法について

自然数について知っておくべき基本性質を追加する。

12.　X と Y がそれぞれ有限集合ならば，$X \cup Y$ は有限集合になるという定理。

13.　m と n をそれぞれ自然数とする。この時，有限集合 C と D で，$C \cap D = \varnothing$ かつ C と m は全単射，かつ，D と n は全単射なものが存在することが示される。$C \cup D$ は第12項により有限集合である。$m+n$ を $|C \cup D|$ により定義する。（自然数の加法の定義である。）この $m+n$ は，上記の条件を満たす有限集合 C と D の取り方に依らずに，m と n のみで定まることも容易に証明される。

14.　自然数の減法と一意性。m と n を $m<n$ または $m=n$ を満たす任意の自然数の対とする。この時 $n=m+x$ を満たす自然数 x が唯一つ存在するという定理。この x を $n-m$ で表す。

これらも筆者（畑田）は代数学Ⅱの授業で証明を付けて説明している。

（$m<n$ または $m=n$）を $m \le n$ で表す。

加法を用いた（i）の証明：　$|A| = a$ とおく。差集合 $A - f(A) = B$ とおく。B も $f(A)$ も有限集合になる。$b = |B|$，$c = |f(A)|$ と書く。$A = B \cup f(A)$ disjoint である。故に $a = b + c$。f は単射なので $a = c$。よって $0 + c = c = b + c$。減法の一意性より $b = 0$，即ち $B = \varnothing$ を得た。

加法を用いた（ii）の証明：

まず次の補題を示す。

補題．（a）p_1, p_2, q_1, q_2 は自然数で $p_1 \le p_2$ と $q_1 < q_2$ を満たしているとする。この時 $p_1 + q_1 < p_2 + q_2$ が成立する。

（b）p_1, p_2, q_1, q_2 は自然数で $p_1 \le p_2$ と $q_1 \le q_2$ を満たしているとする。この時 $p_1 + q_1 \le p_2 + q_2$ が成立する。

補題の証明：(a)　p_1+q_1 から p_2+q_2 への全射でない単射が，$p_1 \subset p_2$ かつ $q_1 < q_2$ より直ぐに得られる。(b)　p_1+q_1 から p_2+q_2 への単射が，$p_1 \subset p_2$ かつ $q_1 \subset q_2$ より直ぐに得られる。

(ii) の証明に戻る。A は有限集合で $A=\bigcup_{x\in A} f^{-1}(x)$ (disjoint) 故，

$|A|=\sum_{x\in A}|f^{-1}(x)|$ が $|A|$ に関する数学的帰納法で証明される。f は全射故，任意の

$x\in A$ に対し $|f^{-1}(\{x\})|\geq 1$ である。$|A|=\sum_{x\in A}1$ も $|A|$ に関する数学的帰納法で証

明される。$\exists y\,(y\in A$ and $|f^{-1}(\{y\})|>1)$ と仮定する。

$|A|$ に関する数学的帰納法で，(b) により $|A|-1\leq\sum_{\substack{x\in A\\ x\neq y}}|f^{-1}(x)|$ が証明される。そして

(a) により $|A|=(|A|-1)+1<\sum_{x\in A}|f^{-1}(x)|$ が証明される。$|A|=\sum_{x\in A}|f^{-1}(x)|$ 故，

$|A|<|A|$ となり矛盾が得られた。

よって $\forall x\,(x\in A\Rightarrow|f^{-1}(\{x\})|=1)$ が成立することが証明された。即ち，f は単射となった。(ii)の仮定（f は全射）と合わせて，f は全単射であることが分かった。

３．　命題１と２

命題１より次の命題２も得られる。

命題２．　A も B も有限集合で $|A|=|B|$ とする。写像 $F:A\to B$ は次の条件のいずれかを満たせば全単射である。　(i)　F は単射.　　　(ii)　F は全射.

証明：　$|A|=|B|$ より A から B への全単射が存在する。その一つの全単射を $\eta:A\to B$ とする。合成写像 $\eta^{-1}\circ F$ は命題１より全単射となる。これより $F=\eta\circ(\eta^{-1}\circ F)$ も全単射となる。

数学では，命題２もよく使われる。