岐阜大学教育学部研究報告　教育実践研究　第18巻（2016），23-34

凸関数と平均に関する不等式

Inequalities on Convex Functions and Means

畑田 一幸（Kazuyuki HATADA）[1]， 向田 和真（Kazuma MUKAIDA）[2]

[1] 岐阜大学教育学部数学教室

[2] 岐阜大学大学院教育学研究科総合教科教育サイエンスコース数学領域

〒５０１－１１９３　岐阜県岐阜市柳戸１－１

Gifu University, Department of Mathematics,

1-1, Yanagido, Gifu City, GIFU 501-1193, Japan

S_n で $\{i\}_{i=1}^{n}$ の対称群(fully symmetric group)を表す。

要旨.

(1)　k を正の定数，　n を正の整数として，　関数 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}(x_i + x_i^{-1})$ の

$$\Omega_1 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i \le k\}$$

における最小値を，　相加平均と相乗平均の不等式の Points of Incidence の考え方と，調和平均と相加平均の不等式を用いて求めた。命題１参照。

(2)　k を正の定数，　n を正の整数とする。$\{c_i\}_{i=1}^{n}$ を正の定数の集合とする。$r \ge 1$ と

$s > 0$ をそれぞれ定数とする。関数 $G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}(x_i^r + x_i^{-s})$ の

$$\Omega_2 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^{n} c_{\sigma(i)} x_i \le k \text{ for all } \sigma \in S_n\}$$

における最小値を凸関数の性質を用いて求めた。命題２とその系を参照。

(3)　k を正の定数，　n を正の整数とする。$\{a_i\}_{i=1}^{n}$，$\{b_i\}_{i=1}^{n}$，$\{c_i\}_{i=1}^{n}$ を，　それぞれ正の

定数の集合とする。関数 $H(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}(a_i x_i + b_i x_i^{-1})$ の

$$\Omega_3 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^{n} c_{\sigma(i)} \sqrt{\frac{b_{\sigma(i)}}{a_{\sigma(i)}}} \sqrt{\frac{a_i}{b_i}} x_i \le k \quad \text{for all} \quad \sigma \in S_n\}$$

における最小値を凸関数の性質を用いて求めた。命題３とその系１と系２を参照。

(4)　k を正の定数，n を正の整数とする。$\{a_i\}_{i=1}^n$，$\{b_i\}_{i=1}^n$，$\{s_i\}_{i=1}^n$ を，それぞれ正の定数の集合とする。$\{r_i\}_{i=1}^n$ を１以上の実定数の集合とする。Ω_0 を $\mathbb{R}^n$ の閉領域とする。$\partial\Omega_0$ で Ω_0 の境界を表す。$\Omega = \Omega_0 \cap \mathbb{R}_+^n$ とおく。関数

$$J(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n (a_i x_i^{r_i} + b_i x_i^{-s_i})$$

（resp.　$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n (a_i x_i^{r_i} + b_i x_i^{-s_i})$）

の Ω における最小値を与える点が多くの場合境界 $\partial\Omega_0 \cap \mathbb{R}_+^n$ に存在すること，及び，そうではない場合を決定した。命題４参照。

Abstract.

(1)　Let k be a positive constant and let n be a positive integer. We give the minimum value of the function $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n (x_i + x_i^{-1})$ on

$$\Omega_1 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i \le k\}$$

using the method of Points of Incidence in AM-GM inequality and AM-HM inequality. See Proposition 1.

(2)　Let k be a positive constant and let n be a positive integer. Let $r \ge 1$ and $s > 0$ be constants. Let $\{c_i\}_{i=1}^n$ be positive constants. We give the minimum value of the function $G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n (x_i^r + x_i^{-s})$ on

$$\Omega_2 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^{n} c_{\sigma(i)} x_i \le k \quad \text{for all} \quad \sigma \in S_n\}$$

using the convex function $f(x) = x^r + x^{-s}$. See Proposition 2 and its Corollary.

(3)　Let k be a positive constant and let n be a positive integer. Let $\{a_i\}_{i=1}^n \cup \{b_i\}_{i=1}^n \cup \{c_i\}_{i=1}^n$ be positive constants. We give the minimum value of the

function $H(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^n(a_ix_i+b_ix_i^{-1})$ on

$$\Omega_3=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^n c_{\sigma(i)}\sqrt{\frac{b_{\sigma(i)}}{a_{\sigma(i)}}}\sqrt{\frac{a_i}{b_i}}x_i\le k \text{ for all } \sigma\in S_n\}$$

using convex functions on certain convex sets. See Proposition 3 and its Corollaries 1 and 2.

(4) Let k be a positive constant and let n be a positive integer. Let $\{a_i\}_{i=1}^n\cup\{b_i\}_{i=1}^n\cup\{s_i\}_{i=1}^n$ be positive constants. Let $\{r_i\}_{i=1}^n$ be real numbers larger than 1. Let Ω_0 be the closure of an open subset of $\mathbb{R}^n$. Let $\partial\Omega_0$ denote the boundary of Ω_0. We put $\Omega=\Omega_0\cap\mathbb{R}_+^n$. We consider functions

$J(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^n(a_ix_i^{r_i}+b_ix_i^{-s_i})$ and $L(x_1,x_2,\dots,x_n)=\prod_{i=1}^n(a_ix_i^{r_i}+b_ix_i^{-s_i})$ on Ω.

We show that the points in Ω that give the minimum value of J (resp. L) exist on $\partial\Omega_0\cap\mathbb{R}_+^n$ in many cases. And we determine the case where no points in $\partial\Omega_0\cap\mathbb{R}_+^n$ give the minimum value of J (resp. L) on Ω. See Proposition 4.

序文.

Z. Cvetkovski 著, Inequalities, Berlin, Heidelberg, Springer, 2012 の p.55 の Exercise 5.9 に, 相加平均と相乗平均に関して points of Incidence の考え方が, 上記(1)の $n=3$ で $k=\frac{3}{2}$ の場合に 紹介されている。向田は, 命題１で, この points of Incidence の考え方を, 上記の(1)に関して, 一般の正整数 n と実数 $k>0$ に拡張した。points of Incidence の考え方でその議論で不十分であった点を, 畑田が補った。

畑田は, 上記の(2)と(3)と(4)の解答を, 下記の命題２と命題３と命題４で与えた。命題２と命題３では, Points of Incidence の考え方を全く用いないで, 凸関数の性質を使った。命題４は本論文で扱う関数の最小値を考えるとき基礎となるものである。

１．　$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}(x_i+x_i^{-1})$ について

次の命題１を与える。

命題１． k を正の定数，　n を正の整数とする。

関数 $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}(x_i+x_i^{-1})$ の

$$\Omega_1=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^{n}x_i\le k\}$$

における最小値は

Case 1 of $k\ge n$:　$2n$ であり，　この最小値を与える $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ は各 $x_i=1$ のときのみである　；

Case 2 of $k<n$:　$\dfrac{n^2+k^2}{k}$ であり，　この最小値を与える $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ は各 $x_i=\dfrac{k}{n}$ のときのみである。

命題１の証明.

Case 1 of $k\ge n$:　$\mathbb{R}_+^n$ で，　AM-GM 不等式を使うと

$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}(x_i+x_i^{-1})\ge 2n\left(\prod_{i=1}^{n}x_ix_i^{-1}\right)^{\frac{1}{2n}}=2n$ が成立し，　等号は各 x_i が１の時に限ることがわかる。　$(1,1,\ldots,1)\in\Omega_1$ 故，　Case 1 が証明された。

Case 2 of $k<n$:　α を正数とする。

AM-GM 不等式を次のように使う。

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}(x_i+x_i^{-1})=\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i)^{-1}+(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i)^{-1}$$

$$\ge 2n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i(\alpha x_i)^{-1}\right)^{\frac{1}{2n}}+\alpha^{-1}(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1} \tag{1.1}$$

by AM-GM inequality

$$\ge 2n\alpha^{-1/2}+\alpha^{-1}(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}\ .$$

(1.1) で等号が成立するのは，　$x_1=(\alpha x_1)^{-1}=x_i=(\alpha x_i)^{-1}$ for all $1\le i\le n$ の時のみ

である。さて正数 u を, $u=u_1=(\alpha u_1)^{-1}=u_i=(\alpha u_i)^{-1}$ for all $1\le i\le n$ かつ $\sum_{i=1}^{n}u_i=k$ を満たす数とする（命題４を参照）。すると $u=kn^{-1}$ かつ $\alpha=k^{-2}n^2$ を得る。この $\alpha>1$ である。この α に対してここで AM-HM 不等式を使うと

$$2n\alpha^{-1/2}+\alpha^{-1}(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}\ge 2n\alpha^{-1/2}+\alpha^{-1}(\alpha-1)n^2\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^{-1}$$
$$\ge 2n\alpha^{-1/2}+\alpha^{-1}(\alpha-1)n^2k^{-1}=(k^2+n^2)k^{-1} \tag{1.2}$$

を得る。また $F(kn^{-1},kn^{-1},\dots,kn^{-1})$ を実際に計算すると $(n^2+k^2)k^{-1}$ を得る。
(1.1) と (1.2) より Case 2 の前半が得られた。

さて $\alpha=k^{-2}n^2$ と置き $F(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}(x_i+x_i^{-1})=(k^2+n^2)k^{-1}$ を仮定する。
(1.1) と (1.2) より

$$F(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}(x_i+x_i^{-1})\ \ge\ 2n\alpha^{-1/2}+\alpha^{-1}(\alpha-1)n^2\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^{-1}$$
$$\ge 2n\alpha^{-1/2}+\alpha^{-1}(\alpha-1)n^2k^{-1}=(k^2+n^2)k^{-1}$$

となり, さらに, (1.2) で等号が成立するので, $\sum_{i=1}^{n}x_i=k$ かつ $x_1=x_i$ for all $1\le i\le n$ となる。よって, $x_i=kn^{-1}$ for all $1\le i\le n$ が得られた。Case 2 の後半が証明された。

2.　$G(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}(x_i^r+x_i^{-s})$ について

次の命題２を与える。

命題２． k を正の定数, n を正の整数とする。$\{c_i\}_{i=1}^{n}$ を正の定数の集合とする。$r\ge 1$ と $s>0$ をそれぞれ定数とする。関数 $G(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}(x_i^r+x_i^{-s})$ の

$$\Omega_2=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^{n}c_{\sigma(i)}x_i\le k \ \text{ for all }\ \sigma\in S_n\}$$

における最小値は

Case 1 of $\left(\dfrac{s}{r}\right)^{1/(r+s)}\le\dfrac{k}{\sum_{i=1}^{n}c_i}$:　$n\left(\dfrac{s}{r}\right)^{r/(r+s)}\dfrac{(r+s)}{s}$ であり, この最小値を与える

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は各 $x_i = \left(\frac{s}{r}\right)^{1/(r+s)}$ のときのみである　;

Case 2 of $\left(\frac{s}{r}\right)^{1/(r+s)} \geq \frac{k}{\sum_{i=1}^{n} c_i}$　:　$n\left(\frac{k}{\sum_{i=1}^{n} c_i}\right)^{r} + n\left(\frac{k}{\sum_{i=1}^{n} c_i}\right)^{-s}$ であり，　この最小値を与える $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は各 $x_i = \frac{k}{\sum_{i=1}^{n} c_i}$ のときのみである。

命題２の証明.

$f(x) = x^r + x^{-s}$　on　$\mathbb{R}_+^n$　と置く。導関数は

$$f'(x) = rx^{r-1} - sx^{-s-1}, \qquad f''(x) = r(r-1)x^{r-2} + s(s+1)x^{-s-2}$$

となり，　$f(x)$ は凸関数で，　最小値を $x = (sr^{-1})^{1/(r+s)}$ でとることがわかる。$f(x)$ の最小値は $(sr^{-1})^{r/(r+s)}(r+s)s^{-1}$ である。　$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^{n} c_{\sigma(i)} x_i \leq k\}$　はどの $\sigma \in S_n$ に対しても凸領域なので Ω_2 も凸領域である。$\varepsilon > 0$ に対し

$$\Omega_2(\varepsilon) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega_2 \mid \varepsilon \leq x_i \quad \text{for all } 1 \leq i \leq n\ \}$$

とおく。$\lim_{x_i \to +\infty} G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = +\infty$ なので，適当な正数 ε を十分小に選べば，　コンパクト集合 $\Omega_2(\varepsilon)$ での G の最小値は，　Ω_2 での G の最小値と一致することがわかる。
$(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n) \in \Omega_2$ で G が最小値をとるとする。このとき

補題 2. 1.　$\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n$ が成立する。

補題 2. 1 の証明。或る $1 \leq i < j \leq n$ で $\theta_i \neq \theta_j$ であると背理法の仮定をする。$f(x)$ は凸関数なので　$f(\theta_i) + f(\theta_j) > f\left(\frac{\theta_i + \theta_j}{2}\right) + f\left(\frac{\theta_i + \theta_j}{2}\right)$　となる。

$G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$　なので

$$G(\theta_1, \ldots, \theta_i, \ldots, \theta_j, \ldots, \theta_n) > G(\theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, (\theta_i + \theta_j)/2, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_{j-1}, (\theta_i + \theta_j)/2, \theta_{j+1}, \ldots, \theta_n)$$

となる。これは $G(\theta_1, \ldots, \theta_i, \ldots, \theta_j, \ldots, \theta_n)$ が Ω_2 での最小値であることに矛盾する。補題

2.1 が証明された。

$\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_n=\theta$ と書く。$G(\theta,......,\theta)=n(\theta^r+\theta^{-s})=nf(\theta)$ である。そして

$(\theta,\theta,\ldots,\theta)\in\Omega_2$ なので，$\left(\sum_{i=1}^n c_i\right)\theta\le k$ である。θ は $f(x)$ の $0<x\le\left(\sum_{i=1}^n c_i\right)^{-1}k$ における，最小値でなければならない。　よって

Case 1 of $\left(\dfrac{s}{r}\right)^{1/(r+s)}\le\dfrac{k}{\sum_{i=1}^n c_i}$ の時，　$\theta=(sr^{-1})^{1/(r+s)}$ である。

Case 2 of $\left(\dfrac{s}{r}\right)^{1/(r+s)}\ge\dfrac{k}{\sum_{i=1}^n c_i}$ の時，　$f(x)$ の増減表より，　$\theta=\dfrac{k}{\sum_{i=1}^n c_i}$ である。

$G(\theta,......,\theta)=n(\theta^r+\theta^{-s})=nf(\theta)$ に代入して，命題２が得られる。

命題２の系． k を正の定数，　n を正の整数とする。$\{c_i\}_{i=1}^n$ を正の定数の集合とする。

$r\ge1$ と $s>0$　をそれぞれ定数とする。関数 $G(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^n(x_i^r+x_i^{-s})$ の

$$\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}_+^n \mid \left(\sum_{i=1}^n c_i\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\le nk\}$$

における最小値は

Case 1 of $\left(\dfrac{s}{r}\right)^{1/(r+s)}\le\dfrac{k}{\sum_{i=1}^n c_i}$ ：　$n\left(\dfrac{s}{r}\right)^{r/(r+s)}\dfrac{(r+s)}{s}$ であり，　この最小値を与える

$(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ は各 $x_i=\left(\dfrac{s}{r}\right)^{1/(r+s)}$ のときのみである　；

Case 2 of $\left(\dfrac{s}{r}\right)^{1/(r+s)}\ge\dfrac{k}{\sum_{i=1}^n c_i}$ ：　$n\left(\dfrac{k}{\sum_{i=1}^n c_i}\right)^r+n\left(\dfrac{k}{\sum_{i=1}^n c_i}\right)^{-s}$ であり，　この最小値

を与える $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ は各 $x_i=\dfrac{k}{\sum_{i=1}^n c_i}$ のときのみである。

(Remark.　$\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n_+ \mid \left(\sum_{i=1}^{n}c_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\le nk\}\supset\Omega_2$)

３．　$H(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}(a_ix_i+b_ix_i^{-1})$ について

次の命題３を与える。

命題３． k を正の定数，　n を正の整数とする。$\{a_i\}_{i=1}^n$，$\{b_i\}_{i=1}^n$，$\{c_i\}_{i=1}^n$ を，　それぞれ正の定数の集合とする。関数 $H(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}(a_ix_i+b_ix_i^{-1})$ の

$$\Omega_3=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n_+ \mid \sum_{i=1}^{n}c_{\sigma(i)}\sqrt{\frac{b_{\sigma(i)}}{a_{\sigma(i)}}}\sqrt{\frac{a_i}{b_i}}x_i\le k \ \text{ for all } \ \sigma\in S_n\}$$

における最小値は次のとおりである。各々の添数 $i\in[1,n]$ に対して $d_i=c_i\sqrt{\frac{b_i}{a_i}}$ とおく。

$\varphi=\frac{k}{\sum_{i=1}^{n}d_i}$ とおく。

Case 1 of $\varphi\ge 1$.　$H(x_1,x_2,\dots,x_n)$ の Ω_3 における最小値は $2\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_ib_i}\right)$ であり，この最小値は，各々の添数 $i\in[1,n]$ に対して $x_i=\sqrt{\frac{b_i}{a_i}}$ のとき，そしてそのときに限り，満たされる。

Case 2 of $\varphi<1$.　$H(x_1,x_2,\dots,x_n)$ の Ω_3 における最小値は $\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_ib_i}\right)\left(\frac{k}{\sum_{i=1}^{n}d_i}+\frac{\sum_{i=1}^{n}d_i}{k}\right)$ であり，この最小値は，各々の添数 $i\in[1,n]$ に対して $x_i=\sqrt{\frac{b_i}{a_i}}\varphi$ のとき，そしてそのときに限り，満たされる。

命題３の証明.

各々の添数 $i \in [1,n]$ に対して，$\lambda_i = \sqrt{\dfrac{b_i}{a_i}}$，$d_i = c_i \lambda_i$，$y_i = \dfrac{x_i}{\lambda_i}$，$\alpha_i = \sqrt{a_i b_i}$ とおく。

$\alpha_i = a_i \lambda_i = \dfrac{b_i}{\lambda_i}$ である。Ω_3 は凸領域であることは直ぐにわかる。

$$\Omega_3' = \{(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^{n} d_{\sigma(i)} y_i \le k \ \text{ for all } \ \sigma \in S_n\}$$

が凸領域になることも直ぐにわかる。$y_i = \dfrac{x_i}{\lambda_i}$ $(1 \le i \le n)$ により，Ω_3 と Ω_3' は全単射である。Ω_3' 上の関数 $h(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (y_i + y_i^{-1})$ は,

$$h(y_1, y_2, \dots, y_n) = H(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

を満たす。

$\varepsilon > 0$ に対し

$$\Omega_3'(\varepsilon) = \{(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \Omega_3' \mid \varepsilon \le y_i \ \text{ for all } 1 \le i \le n\}$$

とおく。$\lim_{y_i \to +\infty} h(y_1, y_2, \dots, y_n) = +\infty$ なので，適当な正数 ε を十分小に選べば，コンパクト集合 $\Omega_3'(\varepsilon)$ での h の最小値は，Ω_3 での h の最小値と一致することがわかる。$(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \in \Omega_3$ で h が最小値をとるとする。このとき

補題 3. 1.　$\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n$ が成立する。

補題 3. 1 の証明。或る $1 \le i \le n$ と或る $1 \le j \le n$ で $\theta_i < \theta_j$ であると背理法の仮定をする。

$f(y) = y + y^{-1}$ は $y > 0$ で凸関数である。$\theta_i < \dfrac{\alpha_i}{\alpha_i + \alpha_j}\theta_i + \dfrac{\alpha_j}{\alpha_i + \alpha_j}\theta_j < \theta_j$ かつ

$\dfrac{\alpha_i f(\theta_i) + \alpha_j f(\theta_j)}{\alpha_i + \alpha_j} > f\left(\dfrac{\alpha_i \theta_i + \alpha_j \theta_j}{\alpha_i + \alpha_j}\right)$ となる。即ち,

$$\alpha_i f(\theta_i) + \alpha_j f(\theta_j) > (\alpha_i + \alpha_j) f\left(\frac{\alpha_i \theta_i + \alpha_j \theta_j}{\alpha_i + \alpha_j}\right) = \alpha_i f\left(\frac{\alpha_i \theta_i + \alpha_j \theta_j}{\alpha_i + \alpha_j}\right) + \alpha_j f\left(\frac{\alpha_i \theta_i + \alpha_j \theta_j}{\alpha_i + \alpha_j}\right)$$

を得る。

$h(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$ なので

$$h(\theta_1,\dots,\theta_i,\dots,\theta_j,\dots,\theta_n) > h(\theta_1,\dots,\theta_{i-1},\frac{\alpha_i\theta_i+\alpha_j\theta_j}{\alpha_i+\alpha_j},\theta_{i+1},\dots,\theta_{j-1},\frac{\alpha_i\theta_i+\alpha_j\theta_j}{\alpha_i+\alpha_j},\theta_{j+1},\dots,\theta_n)$$

（$i<j$ のとき）；

$$h(\theta_1,\dots,\theta_j,\dots,\theta_i,\dots,\theta_n) > h(\theta_1,\dots,\theta_{j-1},\frac{\alpha_i\theta_i+\alpha_j\theta_j}{\alpha_i+\alpha_j},\theta_{j+1},\dots,\theta_{i-1},\frac{\alpha_i\theta_i+\alpha_j\theta_j}{\alpha_i+\alpha_j},\theta_{i+1},\dots,\theta_n)$$

（$i>j$ のとき），

となる。前者は，$i<j$ のとき，$h(\theta_1,\dots,\theta_i,\dots,\theta_j,\dots,\theta_n)$ が $\Omega_3{}'$ での最小値であることに矛盾する。後者は，$i>j$ のとき，$h(\theta_1,\dots,\theta_j,\dots,\theta_i,\dots,\theta_n)$ が $\Omega_3{}'$ での最小値であることに矛盾する。$\theta_i<\theta_j$ から矛盾が得られた。補題 3. 1 が証明された。

この補題によって，命題３の証明は $d(t)=h(t,t,..,t)$ の $\{t\in\mathbb{R}_+ \mid \left(\sum_{i=1}^n d_i\right)t\le k\}$ に於ける最小値の決定に帰着する。$\varphi=\dfrac{k}{\sum_{i=1}^n d_i}$ とおいた。$f(t)=t+t^{-1}$ の増減表と $d(t)=\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)f(t)$ を用いる。容易に次が得られる。

Case 1 of $\varphi\ge 1$.　$d(t)$ の最小値は，$t=1$ のときで，その値は $2\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)$ である。

Case 2 of $\varphi<1$.　$d(t)$ の最小値は，$t=\varphi$ のときで，その値は $\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)(\varphi+\varphi^{-1})$ である。

命題３が証明された。

命題３の系１．　$\Omega_3^*=\{(y_1,y_2,\dots,y_n)\in\mathbb{R}_+^n \mid \left(\sum_{i=1}^n d_i\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)\le nk\}$ とおく。（$\Omega_3{}'\subset\Omega_3^*$ である。）Ω_3^* に於ける h の最小値は，

Case 1 of $\varphi\ge 1$.　$t=1$ のときで，その値は $2\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i b_i}\right)$ である。

Case 2 of $\varphi < 1$.　$t = \varphi$ のときで，その値は$\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i b_i}\right)(\varphi + \varphi^{-1})$である。

命題３の系２．　$\Omega_3^{**} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n \mid \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \sqrt{\frac{b_i}{a_i}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{a_i}{b_i}} x_i\right) \le nk\}$ とおく。

（$\Omega_3 \subset \Omega_3^{**}$ である。$d_i = c_i \sqrt{\frac{b_i}{a_i}}$ であった。）Ω_3^{**} に於ける H の最小値は,

Case 1 of $\varphi \ge 1$.　各々の添数 i に対し $x_i = \sqrt{\frac{b_i}{a_i}}$ のときで，その値は $2\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i b_i}\right)$ である。

Case 2 of $\varphi < 1$.　各々の添数 i に対し $x_i = \sqrt{\frac{b_i}{a_i}}\varphi$ のときで，その値は $\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i b_i}\right)(\varphi + \varphi^{-1})$ である。

４．　$J(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}(a_i x_i^{r_i} + b_i x_i^{-s_i})$　と　$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n}(a_i x_i^{r_i} + b_i x_i^{-s_i})$ について

次の命題４を与える。

命題４． k を正の定数，n を正の整数とする。$\{a_i\}_{i=1}^{n}$，$\{b_i\}_{i=1}^{n}$，$\{s_i\}_{i=1}^{n}$ を，それぞれ正の定数の集合とする。$\{r_i\}_{i=1}^{n}$ を１以上の実定数の集合とする。Ω_0 を $\mathbb{R}^n$ の閉領域とする。$\partial\Omega_0$ で Ω_0 の境界を表す。$\Omega = \Omega_0 \cap \mathbb{R}_+^n$ とおく。関数

$$J(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}(a_i x_i^{r_i} + b_i x_i^{-s_i})$$

（resp.　$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} (a_i x_i^{r_i} + b_i x_i^{-s_i})$））

のΩにおける最小値に関して次を得る。

（Remark.　$J(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} (a_i x_i^{r_i} + b_i x_i^{-s_i})$

（resp.　$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} (a_i x_i^{r_i} + b_i x_i^{-s_i})$））

の$\mathbb{R}_+^n$における最小値は,

$$\left(\sqrt[r_1+s_1]{\frac{b_1 s_1}{a_1 r_1}}, \sqrt[r_2+s_2]{\frac{b_2 s_2}{a_2 r_2}}, \dots, \sqrt[r_n+s_n]{\frac{b_n s_n}{a_n r_n}} \right) = P$$

で達成されることは, 高等学校の数学の、1変数関数の増減表を用いて容易にわかる。)

Case 1　（$P \in \Omega$の場合）.　J（resp.　L）のΩにおける最小値は$J(P)$（resp.　$L(P)$）である。

Case 2（$P \notin \Omega$の場合).　J（resp.　L）のΩにおける最小値は$(\partial\Omega_0) \cap \mathbb{R}_+^n$上の点で達成される。

命題4の証明.　Case 1は$\mathbb{R}_+^n$での最小値から直ちにわかる。

Case 2：　$Q \in \Omega$とする。有向線分QP上の動点SがQからPまで動く時,　$J(S)$（resp.　$L(S)$）は単調に増大する。（これは, 1変数関数$a_i x_i^{r_i} + b_i x_i^{-s_i}$の増減表を考えればすぐにわかる。）よって$J(S)$（resp.　$L(S)$）の線分QP上の最小値は$(\partial\Omega_0) \cap \mathbb{R}_+^n$上の点で達成される。Case 2も証明された。