岐阜大学教育学部研究報告　教育実践研究　第16巻，1-5，(2014)

Popoviciuの不等式の応用例
Applications of Popoviciu's Inequality

藤原 泰輔（Taisuke FUJIWARA），　畑田 一幸（Kazuyuki HATADA）
岐阜大学教育学部数学教室
〒５０１－１１９３　岐阜県岐阜市柳戸１－１
Gifu University, Department of Mathematics, Faculty of Education,
1-1, Yanagido, Gifu City, GIFU 501-1193, Japan

要旨．　本年度の卒業研究では，学生達は，Z. Cvetkovski 著の「Inequalities」，Springer 出版社，Berlin，Heidelberg，(2012 年出版）を読み研究し発表した。この本の Exercise 7.6 については，Cvetkovski のその本には証明の方針が短く書いてあるだけで，証明自体は省略されている。Exercise 7.6 に証明を与え，そして，それを一般の n 変数に拡張する。

Abstract. In our seminar (2013-2014) we read Z. Cvetkovski, "Inequalities," Springer, Berlin, Heidelberg, 2012. As to a proof of Exercise 7.6 in this book Cvetkovski gives only a short guidance of 4 lines. The author does not give a proof of Exercise 7.6. In this note we prove Exercise 7.6 and generalize the inequality of Exercise 7.6 to the case of n variables.

１．　Jensenの不等式とPopoviciuの不等式

まず，凸関数の定義を記す。

凸関数（convex function）の定義：
関数 f を閉区間 $[a,b]$ で定義される実数値の凸関数とする。n を正の整数とし，α を１より小さい正の実数とする。x_1, x_2 を閉区間 $[a,b]$ に属する実数とする。このとき
$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \le \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$
が常に成立するとき，関数 f は閉区間 $[a,b]$ で凸（convex）という。

次に，主題に関連する２種類の基本不等式を記す。

定理 1 (Jensen's inequality).　関数 f を開区間 (a,b) で定義される実数値の凸関数とする。n を正の整数とし，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ はそれぞれ１より小さい正の実数で $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$ を満たしているとする。$x_1, x_2, \ldots, x_n$ を開区間 (a,b) に属する実数とする。このとき

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right)\le\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)$$

が成立する。

この証明については，Cvetkovski の上記の本の pp.70~72 に紹介されている。

定理 2 (Popoviciu's inequality).　関数 f を閉区間 $[a,b]$ で定義される実数値の凸関数とする。x,y,z を閉区間 $[a,b]$ に属する実数とする。このとき

$$f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)+\frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}\ge\frac{2}{3}\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right)+f\left(\frac{y+z}{2}\right)+f\left(\frac{z+x}{2}\right)\right)$$

が成立する。

この証明については，Cvetkovski の上記の本の pp.73~74 に紹介されている。

注１．　その本の p.73 の lines 9~11 によれば，「Popoviciu の不等式は Jensen の不等式よりも強い。」“i.e., in some cases this inequality can be a powerful tool for proving other inequalities, where Jensen's inequality does not work.”

２．　Popoviciu の不等式の応用例

その本の p. 77 に次の練習問題が載っている。

Exercise 7.6.　x,y,z を正の実数とする。次の不等式を証明せよ。

$$\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}\ge 4\left(\frac{z}{x+y}+\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}\right).$$

藤原泰輔による Exercise 7.6 の証明.

$f(t)=t+t^{-1}$　$(t>0)$ とおく。$f''(t)=2t^{-3}>0$ となるので，$f(t)$ は凸関数である。
定理２をこの $f(t)$ に適用する。次の不等式を得る。

$$\frac{x+y+z}{3}+\frac{3}{x+y+z}+\frac{1}{3}\left(x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$
$$\ge\frac{2}{3}\left(\frac{x+y}{2}+\frac{y+z}{2}+\frac{z+x}{2}+\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x}\right).$$

この不等式を次のように同値変形する。

$$\frac{2(x+y+z)}{3}+\frac{3}{x+y+z}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$
$$\geq \frac{2}{3}\left(x+y+z+\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x}\right)$$
$$=\frac{2}{3}(x+y+z)+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right).$$

$-\frac{2}{3}(x+y+z)$ を加えた不等式に直してから，全体を３倍する。次の不等式を得る。

$$\frac{9}{x+y+z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 4\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right).$$

更に，両辺を $(x+y+z)$ 倍する。次の不等式を得る。

$$9+\frac{x+y+z}{x}+\frac{x+y+z}{y}+\frac{x+y+z}{z}\geq 4\left(\frac{x+y+z}{x+y}+\frac{x+y+z}{y+z}+\frac{x+y+z}{z+x}\right).$$

この不等式を次のように同値変形する。

$$9+1+1+1+\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}$$
$$\geq 4\left(1+\frac{z}{x+y}+1+\frac{x}{y+z}+1+\frac{y}{z+x}\right)=12+4\left(\frac{z}{x+y}+\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}\right).$$

よって，求めるべき不等式

$$\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}\geq 4\left(\frac{z}{x+y}+\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}\right)$$

が証明された。以上が藤原泰輔の証明である。

強い意味での凸関数（strictly convex function）の定義：

関数 f を閉区間 $[a,b]$ で定義される実数値の凸関数とする。α を１より小さい正の実数とする。x_1, x_2 を閉区間 $[a,b]$ に属する相異なる実数とする。このとき

$$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)<\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$$

が常に成立するとき，関数 f は閉区間 $[a,b]$ で強い意味で凸（strictly convex）という。

定理２において，関数 f が閉区間 $[a,b]$ で定義される実数値の強い意味での凸関数であり，かつ

$$f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)+\frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}=\frac{2}{3}\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right)+f\left(\frac{y+z}{2}\right)+f\left(\frac{z+x}{2}\right)\right)$$

が成立するならば，Cvetkovski の上記の本の pp.73~74 に書かれている定理２の証明により，$x=y=z$ となることが分かる。

注２（等号成立の場合）． さて Exercise 7.6 **において**

$$\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}=4\left(\frac{z}{x+y}+\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}\right)$$

が成立しているとする。これは，

$$\frac{x+y+z}{3}+\frac{3}{x+y+z}+\frac{1}{3}\left(x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$
$$=\frac{2}{3}\left(\frac{x+y}{2}+\frac{y+z}{2}+\frac{z+x}{2}+\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x}\right)$$

が成立している場合である。

$$f(t)=t+t^{-1}\quad(t>0)$$

は強い意味での凸関数なので，Exercise 7.6 において，上記の等式が成立するのは $x=y=z$ の場合のみであることも分かる。

３．　一般化された Popoviciu の不等式

次の定理は，Cvetkovski の上記の本の p.74 に，証明なしに書かれている。

定理 3 (Generalized Popoviciu's inequality). 関数 f を閉区間 $[a,b]$ で定義される実数値の凸関数とする。$n\geq 3$ を整数とし，$a_1,a_2,\ldots,a_n$ をそれぞれ閉区間 $[a,b]$ に属する実数とする。$a=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)$ とおく。各々の整数 $i\in[1,n]$ に対し，$b_i=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}}a_j\right)$ とおく。このとき

$$\left(\sum_{i=1}^{n}f(a_i)\right)+n(n-2)f(a)\geq(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n}f(b_i)\right)$$

が成立する。

この定理３は V. Cirtoaje によって２００２～２００５年に得られた。

この定理３の証明を，練習問題として，通常の学生が解くことは，かなり困難のように思われる。

定理３を用いて，上記の Exercise 7.6 は一般変数に次のように拡張されることが分かった。

命題１． n を４以上の整数とする。$a_1,a_2,\ldots,a_n$ を正の実数とする。　$s_n=\sum_{i=1}^n a_i$ とおく。このとき

$$\sum_{i=1}^n \frac{s_n-a_i}{a_i} \geq (n-1)^2\left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s_n-a_i}\right)$$

が成立する。

命題１の証明． 凸関数 $f(t)=t+t^{-1}$　$(t>0)$ に対し定理３を適用する。

$$\sum_{i=1}^n\left(a_i+\frac{1}{a_i}\right)+n(n-2)\left(\frac{s_n}{n}+\frac{n}{s_n}\right)\geq(n-1)\left(\sum_{i=1}^n\left(\frac{s_n-a_i}{n-1}+\frac{n-1}{s_n-a_i}\right)\right)$$

を得る。これに，Exercise 7.6 の藤原泰輔の証明方法を使う。この不等式を同値変形して，

$$(n-1)s_n+\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i}+\frac{n^2(n-2)}{s_n}\geq(n-1)s_n+(n-1)^2\left(\sum_{i=1}^n\frac{1}{s_n-a_i}\right)$$

を得る。この両辺から $(n-1)s_n$ を引いてから，全体に s_n をかける。

$$\sum_{i=1}^n\left(1+\frac{s_n-a_i}{a_i}\right)+n^2(n-2)\geq(n-1)^2\left(\sum_{i=1}^n\left(1+\frac{a_i}{s_n-a_i}\right)\right)$$

を得る。$n+n^2(n-2)-(n-1)^2n=0$ であるから，これより

$$\sum_{i=1}^n \frac{s_n-a_i}{a_i} \geq (n-1)^2\left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s_n-a_i}\right)$$

を得る。