岐阜大学教育学部研究報告　教育実践研究　第15巻，13-19，(2013)

一般のベクトル空間の性質

Properties on the Vector Space

畑田　一幸
Kazuyuki HATADA
岐阜大学教育学部数学教室
〒５０１－１１９３　岐阜県岐阜市柳戸１－１
Gifu University, Department of Mathematics, Faculty of Education,
1-1, Yanagido, Gifu City, GIFU 501-1193, Japan

要旨.　一般のベクトル空間の定義はよく知られている。それらを用いて一般のベクトル空間の性質は導かれる。しかし、現在まで出版されている本では、実際によく使われる性質が省かれていたり、説明なしにそれらの性質が使われたりしている。それらを補うのは難しくないという立場で、省略部分は読者が補うべきであるという考え方でベクトル空間の本は書かれている。この方針は、数学の専門書では通常のことである。さて、この論文では、通常、本には書かれていないが、よく使われていて知っていた方がよい性質や細部まで書いた証明を、記す。

Abstract.　Properties of the vector space are derived from the definitions of the vector space. In text books on the vector space some of necessary fundamental properties of the vector space are omitted. Readers of those books must supply them for themselves. In this paper we show some of necessary fundamental properties of the vector space that are not usually written explicitly in text books.

１．　一般のベクトル空間の定義

K を体とし、V を集合（$\neq\varnothing$）とする。二つの写像 $f:V\times V\to V$ と $g:K\times V\to V$ で下記の(i)から(viii)の条件を満たすものが存在しているとする。$x,y\in V$ に対し $f(x,y)=x+y$　；　$x\in V$ と $\lambda\in K$ に対し $g(\lambda,x)=\lambda x$ と　省略して書く。1_K で K の乗法に関する単位元を表す。$\lambda,\mu\in K$ に対し、$\lambda\mu$ で K における λ と μ の積、$\lambda+\mu$ で K における λ と μ の和を表す。

(i)　V の任意の元 x,y,z に対して、$(x+y)+z=x+(y+z)$ が成立する。（＋に関する結合法則）

(ii)　V の任意の元 x,y に対して、$x+y=y+x$ が成立する。（＋に関する交換法則）

(iii)　V の元 o で、V の任意の元 x に対して　$x+o=x$ を満たす o が存在する。

（注.　(ii)と(iii)により、(iii)の条件を満たすV の元は唯一である。）

(iv)　V の任意の元 x に対して、$x+x'=o$ を満たすV の元 x' が存在する。

（注. (i)と(ii)と(iii)により、V の任意の元 x に対して(iv)の条件を満たすV の元 x' は唯一である。このの x' を $-x$ と書く。）

(v)　K の任意の元 λ,μ とV の任意の元 x に対して、$(\lambda+\mu)x=(\lambda x)+(\mu x)$ が成立する。

（注. K の任意の元 λ,μ とV の任意の元 x,y に対して、$\lambda x+\mu y$ を $(\lambda x)+(\mu y)$ により定義する。）

(vi)　K の任意の元 λ とV の任意の元 x,y に対して、$\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$ が成立する。

(vii)　K の任意の元 λ,μ とV の任意の元 x に対して、$(\lambda\mu)x=(\lambda(\mu x))$ が成立する。

(viii)　V の任意の元 x に対して、$1_K x=x$ が成立する。

このとき３つ組 (V,f,g) を K 上のベクトル空間（または、線型空間）という。文脈上 f,g を省略しても (V,f,g) のことであると分かる場合には、(V,f,g) をV と書いてもよい。

V の任意の元 x,y に対して、$y+(-x)$ を $y-x$ と書いてもよい。

(i)から(viii)の定義は、一般のベクトル空間を扱っているどの本も同じである。

２．　定義から得られるベクトル空間の性質で既出版の本に書かれているもの

一般のベクトル空間の定義から導かれる次の基本性質は、[3]、[4]、[5]に記述されている。

0_K で K の加法の単位元を表す。

(1)　V の任意の元 x に対して、$0_K x=o$ が成立する。

(2)　K の任意の元 λ に対して、$\lambda o=o$ が成立する。

(3)　K の任意の元 λ とV の任意の元 x に対して、$(-\lambda)x=-(\lambda x)$ が成立する。

(4)　K の任意の元 λ とV の任意の元 x に対して、$\lambda(-x)=-(\lambda x)$ が成立する。

これらは、[1]には記述されていない。

これらは実際によく使われるので、学生への講義の際には必ず教えるべきである。

３．　定義から得られるベクトル空間の性質で、よく使用されるのにもかかわらず、既出版の本に書かれていないもの

命題４までは、n を任意の正の整数とし、$x_1,x_2,x_3,\dots,x_n$ をそれぞれ任意のV の元とする。

定義１．　$y_2=x_1+x_2$，すべての $3\le j\le n$ に対し、$y_j=y_{j-1}+x_j$ により、$\{y_j\}_{j=2}^n$ を帰納的に定義する。そして、$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n$ を y_n で定義する。

次の命題１は代数学の本（たとえば[5]）では書かれているのに、線型代数学のみを扱った本で

は、筆者が見た範囲では、書かれていない。
命題１（一般化された結合法則）． $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n$ に、左括弧（と右括弧）の対を、いくつでも、好き勝手な位置に書き入れても、結果は同じである。但し、(は文字の直前に書き、) は文字の直後に書くものとする。ここで、文字とは $x_1,x_2,x_3,...,x_n$ のことである。

命題１と(ii)より、容易に、次の命題２が得られる。命題２も代数学の本（たとえば[5]）では書かれているのに、線型代数学のみを扱った本では、筆者が見た範囲では、書かれていない。

命題２（一般化された交換法則）． 対称群 S_n の任意の元 σ に対し、

$$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=x_{\sigma(1)}+x_{\sigma(2)}+x_{\sigma(3)}+\cdots+x_{\sigma(n)}$$

が成立する。

命題４までは、n を任意の正の整数とし、$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_n$ をそれぞれ任意の K の元とする。

定義２． $x\in V$ とする。 $z_1=\alpha_1 x$, $z_2=\alpha_2 z_1$, すべての $3\le j\le n$ に対し、 $z_j=\alpha_j z_{j-1}$ により、$\{z_j\}_{j=1}^n$ を帰納的に定義する。そして、 $\alpha_n\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\cdots\alpha_2\alpha_1 x$ を z_n で定義する。

(v)と(vi)と n に関する数学的帰納法で、命題３と命題４は容易に証明される。命題３も命題４も線型代数学のみを扱った本では、筆者が見た範囲では、書かれていない。命題１，２，３，４とも、線型代数学を実際に使う際、頻繁に使われるものである。

命題３． 任意の $\alpha\in K$ に対し、 $\alpha(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)=\alpha x_1+\alpha x_2+\alpha x_3+\cdots+\alpha x_n$ が成立する。

命題４． 任意の $x\in V$ に対し、 $(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n)x=\alpha_1 x+\alpha_2 x+\alpha_3 x+\cdots+\alpha_n x$ が成立する。

次の命題５と定理１は、線型代数学を扱う殆どの本に書かれている基本的なものである。しかし、線型代数学を扱う本に書かれている、命題５の証明は、大筋しか書いていなくて、上記の(i)から(viii)のみをどのように使用して証明されるのか詳しく書かれていない。そのような説明は、数学書では通常であるので、それらの本に欠陥があるとは言えないと思う。しかし、本論文では、上記の(i)から(viii)がどのように実際に使われるのかを示すため、詳しい証明を与える。

命題５． n を正の整数とし、$x_1,x_2,x_3,...,x_n,y$ をそれぞれ V の元とする。$x_1,x_2,x_3,...,x_n$ は K 上線型独立で、$x_1,x_2,x_3,...,x_n,y$ は K 上線型従属であると、仮定する。このとき、y は $x_1,x_2,x_3,...,x_n$ の K 上の線型結合として表せる。
（注. $x_1,x_2,x_3,...,x_n$ は K 上線型独立なので、y のこの表示は唯一通りである。）
命題５の証明． 仮定より、K の元 $\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_n$ で

$(\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_n)\neq(0_K,0_K,0_K,0_K,...,0_K)$ で $\alpha y+\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\cdots+\alpha_nx_n=o$ を満たすものが存在する。ここでもし $\alpha=0_K$ ならば、$x_1,x_2,x_3,...,x_n$ は K 上線型独立なので、$(\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_n)=(0_K,0_K,0_K,0_K,...,0_K)$ となり矛盾する。

よって $\alpha\neq0_K$ である。$\alpha y+\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\cdots+\alpha_nx_n=o$ の両辺に $-\alpha y$ を加える。次を得る。

$$(-\alpha y)+(\alpha y+\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\cdots+\alpha_nx_n)=(-\alpha y)+o=-\alpha y.$$

この左辺に命題１を適用して、

$$\begin{aligned}&(-\alpha y+\alpha y)+(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\cdots+\alpha_nx_n)=0_K+(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\cdots+\alpha_nx_n)\\&=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\cdots+\alpha_nx_n=-\alpha y\end{aligned}$$

を得る。(3)より $-\alpha y=(-\alpha)y.$ $(-\alpha)^{-1}$ を上式の両辺に左からかける。

$$(-\alpha)^{-1}(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\cdots+\alpha_nx_n)=(-\alpha)^{-1}((-\alpha)y)$$

を得る。

この右辺について、(vii)を用いて　$(-\alpha)^{-1}((-\alpha)y)=((-\alpha)^{-1}(-\alpha))y=1_K y$ を得、更に、(viii)を用いて $1_K y=y$ を得る。

上式の左辺について、命題３を用いて展開すると、

$$(-\alpha)^{-1}(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\cdots+\alpha_nx_n)=(-\alpha)^{-1}(\alpha_1x_1)+(-\alpha)^{-1}(\alpha_2x_2)+(-\alpha)^{-1}(\alpha_3x_3)+\cdots+(-\alpha)^{-1}(\alpha_nx_n)$$

を得る。K は体なので、$(-\alpha)(-\alpha^{-1})=1_K$ であり、$(-\alpha)^{-1}=-\alpha^{-1}$ であり、$(-\alpha)^{-1}\alpha_j=(-\alpha^{-1})\alpha_j=-(\alpha^{-1}\alpha_j)$ である。また $-(\alpha^{-1}\alpha_j)$ を $-\alpha^{-1}\alpha_j$ と表す。さらに(vii)を用いて、$(-\alpha^{-1})(\alpha_jx_j)=((-\alpha^{-1})\alpha_j)x_j=(-\alpha^{-1}\alpha_j)x_j$ を得る。よって

$$\begin{aligned}&(-\alpha)^{-1}(\alpha_1x_1)+(-\alpha)^{-1}(\alpha_2x_2)+(-\alpha)^{-1}(\alpha_3x_3)+\cdots+(-\alpha)^{-1}(\alpha_nx_n)\\&=(-\alpha^{-1}\alpha_1)x_1+(-\alpha^{-1}\alpha_2)x_2+(-\alpha^{-1}\alpha_3)x_3+\cdots+(-\alpha^{-1}\alpha_n)x_n\end{aligned}$$

を得た。

以上より $y=(-\alpha^{-1}\alpha_1)x_1+(-\alpha^{-1}\alpha_2)x_2+(-\alpha^{-1}\alpha_3)x_3+\cdots+(-\alpha^{-1}\alpha_n)x_n$ を得た。　**q.e.d.**

定理１． 体 K 上のベクトル空間 (V,f,g) は、K 上の基底を持つ。

定理１の証明．**Zorn** の補題によって、V に極大な線型独立部分集合が存在する。S を極大な線型独立部分集合 $\subset V$ とする。$y\in V$ を $y\notin S$ とすれば、$\{y\}\cup S$ は線型従属になる。命題５により y は S の有限個の元の K 上の線型結合として表される。**q.e.d.**

Σ で (V,f,g) のひとつの K 上の基底を表す。よって $V=\oplus_{s\in\Sigma}Ks$　である。$x,y\in V$ とする。

$x=\sum_{s\in\Sigma}\lambda_s s$　($\lambda_s\in K$ で $\lambda_s\neq0_K$ である s は有限個)；

$y=\sum_{s\in\Sigma}\mu_s s$　($\mu_s\in K$ で $\mu_s\neq0_K$ である s は有限個)　と 唯一通りに書ける。

定理１により、写像 $V\to\oplus_{s\in\Sigma}K,\ \ x\mapsto\oplus_{s\in\Sigma}\lambda_s$　は全単射である。命題１と２と(v)によって、

$x+y=(\sum_{s\in\Sigma}\lambda_s s)+(\sum_{s\in\Sigma}\mu_s s)=\sum_{s\in\Sigma}(\lambda_s+\mu_s)s$　を得る。

また、命題３と(vii)によって、任意の $\rho\in K$ に対し、$\rho x=\sum_{s\in\Sigma}\rho(\lambda_s s)=\sum_{s\in\Sigma}(\rho\lambda_s)s$ を得る。

よって、次の命題６を得る。

命題６． 写像 $V\to\oplus_{s\in\Sigma}K,\ \ x\mapsto\oplus_{s\in\Sigma}\lambda_s$　は K 線型写像として同型である。

V の K 基底の基数が、V によって唯一通りに定まることは、よく知られた定理であるが、線型代数学の多くの本には証明が載っているので、ここではその証明は省略する。慣例に従い、その基数を $\dim_K V$ と書く。

次の命題７も線型代数学でよく使われるものである。しかしこの命題を explicit に取り上げている本を見たことはない。読者がこの命題が成立することに気がついて、証明も読者がするように、著者達は考えているようである。

命題７． n を任意の２以上の整数とし、$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_n$ をそれぞれ任意の K の元とする。x を任意の V の元とする。$\alpha_n\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\cdots\alpha_2\alpha_1 x$ に、左括弧 (と右括弧) の対を、いくつでも、好き勝手な位置に書き入れても、結果は同じである。但し、(は文字の直前に書き、) は文字の直後に書くものとする。ここで、文字とは $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_n,x$ のことである。

体 K の乗法について、結合法則が成立するので、一般化された結合法則が成立する（参照　[5]）。このことと(vii)を用いて、n に関する数学的帰納法を用いれば、命題７の証明が得られる。証明は困難ではないので、本論文の読者は自らそれを与えることができる。

一般のベクトル空間の定義(i)から(viii)がどのように使われるのか示す例として、もうひとつ、次の命題８を記す。命題８はよく知られている。

命題８． T を、体 K 上のベクトル空間 V の、K 上の任意の線型変換とする。K の元達 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,...,\beta_m$（$m\geq 1$）を、$T$ の相異なる固有値とする。どの $j\in[1,m]$ に対しても、

$W_j=$ 固有値 β_j に対する T の固有空間

と書く。このとき、V の K 部分空間 $W_1+W_2+\cdots+W_m$ について

$W_1+W_2+\cdots+W_m=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_m$（直和）が成立する。

命題８の証明．m に関する数学的帰納法による。$m=1$ のとき、成立している。$k<m$ のとき、任意の k 個の T の固有空間について、$W_1+W_2+\cdots+W_k=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_k$ が成立していると仮定する。$x_j\in W_j$（$1\leq j\leq m$）が $x_1+x_2+\cdots+x_m=o$ を満たしているとき、$x_1=x_2=\cdots=x_m=o$ を示す。

$x_1+x_2+\cdots+x_m=o$ を満たしているとする。このとき

$o=T(o)=T(x_1+x_2+\cdots+x_m)=T(x_1)+T(x_2)+\cdots+T(x_m)=\beta_1x_1+\beta_2x_2+\cdots+\beta_mx_m$ が成立する。一方 $x_1+x_2+\cdots+x_m=o$ の両辺に β_1 をかけると、(2)と命題３より、$\beta_1x_1+\beta_1x_2+\cdots+\beta_1x_m=o$ となる。

これらより、

$$(\beta_1x_1+\beta_2x_2+\cdots+\beta_mx_m)-(\beta_1x_1+\beta_1x_2+\cdots+\beta_1x_m)=o-o=o+(-o)=o \tag{8.1}$$

を得る。(viii)と(3)と命題３より

$$-(\beta_1x_1+\beta_1x_2+\cdots+\beta_1x_m)=(-1_K)(\beta_1x_1+\beta_1x_2+\cdots+\beta_1x_m)=(-1_K)(\beta_1x_1)+(-1_K)(\beta_1x_2)+\cdots+(-1_K)(\beta_1x_m)$$

が成立する。(vii)と体の乗法演算の性質（例えば　[3], [5]を参照）より

$$(-1_K)(\beta_1 x_j) = ((-1_K)\beta_1)x_j = (-\beta_1)x_j \quad (1 \le j \le m)$$

を得る。$(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_m x_m) - (\beta_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \cdots + \beta_1 x_m) = Y$ と書く。

上記に示したことから、$Y = (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_m x_m) + ((-\beta_1)x_1 + (-\beta_1)x_2 + \cdots + (-\beta_1)x_m)$　を得る。

命題１と命題２により、

$Y = (\beta_1 x_1 + (-\beta_1)x_1) + (\beta_2 x_2 + (-\beta_1)x_2) + (\beta_3 x_3 + (-\beta_1)x_3) + \cdots + (\beta_m x_m + (-\beta_1)x_m)$　を得る。

(v)により、$Y = (\beta_1 + (-\beta_1))x_1 + (\beta_2 + (-\beta_1))x_2 + (\beta_3 + (-\beta_1))x_3 + \cdots + (\beta_m + (-\beta_1))x_m$　を得る。

よって、　$Y = 0_K x_1 + (\beta_2 + (-\beta_1))x_2 + (\beta_3 + (-\beta_1))x_3 + \cdots + (\beta_m + (-\beta_1))x_m$　を得る。　(1)より

$Y = o + (\beta_2 - \beta_1)x_2 + (\beta_3 - \beta_1)x_3 + \cdots + (\beta_m - \beta_1)x_m = (\beta_2 - \beta_1)x_2 + (\beta_3 - \beta_1)x_3 + \cdots + (\beta_m - \beta_1)x_m$　を得る。

(8.1)より $Y = o$ 故、

$$(\beta_2 - \beta_1)x_2 + (\beta_3 - \beta_1)x_3 + \cdots + (\beta_m - \beta_1)x_m = o \qquad (8.2)$$

を得る。$(\beta_j - \beta_1)x_j \in W_j$ 故、数学的帰納法の仮定より、(8.2)から、任意の $j \in [2,m]$ に対して $(\beta_j - \beta_1)x_j = o$　を得る。任意の $j \in [2,m]$ に対して　$\beta_j - \beta_1 \ne 0_K$　である。$2 \le j \le m$ のとき、$(\beta_j - \beta_1)x_j = o$　に左から $(\beta_j - \beta_1)^{-1}$ をかける。このとき $(\beta_j - \beta_1)^{-1}((\beta_j - \beta_1)x_j) = (\beta_j - \beta_1)^{-1}o$　を得る。

$2 \le j \le m$　とする。

(vii)と(viii)より、　$(\beta_j - \beta_1)^{-1}((\beta_j - \beta_1)x_j) = ((\beta_j - \beta_1)^{-1}(\beta_j - \beta_1))x_j = 1_K x_j = x_j$　を得る。

(2)より、$(\beta_j - \beta_1)^{-1}o = o$　である。

故に、$x_j = o$　$(2 \le j \le m)$　を得る。

さて、$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = o$　であった。　故に　$o = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_m = x_1 + o + o + \cdots + o = x_1$　も得られた。以上で、全ての $1 \le t \le m$ に対して $x_t = o$ が証明された。すなわち、

$W_1 + W_2 + \cdots + W_m = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_m$　（直和）　が証明された。　q.e.d.

４．　後書き

この論文に書いたほど詳しい証明を与えている、線型代数学・代数学の出版されている本はありませんが、学生や読者は、本を読むとき、自分でノートや頭の中で上記のような証明を補い与えることが本の著者により要求されています。それを行なって、数学の理解が完全になります。数学の本の著者が極めて詳細な証明を書かない理由は、多分、書く労力が非常にきつい、書くのに多くの時間を要する、出版費用を抑えるために本のページ数を少なくする必要がある、既によく知られている結果に詳しい説明・証明を与えることが価値あることとは考えない、数学が得意な読者は詳しく書かなくてもすぐに分かってしまうと考えている、もっと創造的な仕事に時間を使いたい、低いレベルのことは書きたくないという欲求、高度な内容の本を書きたいという欲求等であろうと思います。

文献

[1] 斎藤正彦、線型代数入門、東京大学出版会、２００２年、（第４７刷）

[2] 佐武一郎、線型代数学、裳華房、１９８０年、（第３６版）

[3] G. Birkhoff and S. Maclane, A Survey of Modern Algebra, The Third Edition, Macmillan Company, USA, 1965

[4] 服部昭、線型代数学、朝倉書店、１９８７年、（第７刷）

[5] S. Lang,　Algebra, Revised Third Edition, Springer, New York, USA, 2005 (corrected printing)