岐阜大学教育学部研究報告　教育実践研究　第13巻 (2011), 9-15

1次関数
Functions of Polynomials of Degree 1

畑田一幸　(Kazuyuki HATADA)

中学校数学の1次関数の指導方法について論じる。現行の中学校の数学の教科書の扱いが、（証明・正確な論理と論証・数学としての内容）の観点からは、極めて不十分であることを指摘する。どのように改善すべきかも述べる。

a と b を実数の定数として1次関数 $y=ax+b$ の次の性質（（1）と（2））を中学校の2年の数学で教えている。r で任意の実数の定数を表す。

（1）　x の値が1（resp.　r）増加するとき、y の値の変化する量が一定であることに気付かせて、それを理解させる。さらに、1次関数の変化の割合は一定であり a に等しいことを理解させる。

（2）　1次関数 $y=ax+b$ のグラフを x-y 座標平面に表したとき、直線になる。その傾きは a で、y 軸との切片は b である。

以下では、（1）と（2）を中学生に如何に教えるべきかを論じる。

第1節.（1）について

岐阜県の多くの中学校で使われている教科書[4]とその教師用指導書を見ると、具体的な関数 $y=2x+5$、$y=2x-5$、$y=-3x+4$、$y=4x-2$、$y=\frac{1}{2}x+3$　について、$x=-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4$ での値と $x=-3.5,-2.5,0.5,1.5$ での値を数値計算させることにより、「1次関数 $y=ax+b$ では、x の値が1ずつ増加すると、y の値は a ずつ増加する」と結論を出している。即ち、1次関数 $y=2x+5$ について言うと、具体的な数値 c を与えて $2c+5$ と $2(c+1)+5$ を別々に数値計算させてから、その差を計算させて、2と求めさせるの

みである。あるいは、この説明に付け加えて、「１次関数$y=2x+5$は$2x$の部分と５の和であり、$2x$はxが１増えると２増えるので、xが１増えると１次関数$y=2x+5$は２増える。」と生徒に説明させている。

（1） の証明は全く扱われていない。こうした扱いでは、この命題が正しいのか否かが全くわからず、数学を教えて生徒が数学を学習したことにはならない。「$2x$はxが１増えると２増えるので、xが１増えると１次関数$y=2x+5$は２増える」の部分も証明が必要なのに、証明をしようともせずに放置されている。中学１年の比例のところで、「$y=ax$はxが１増えるとa増える」と教科書[３]に書かれているが、既にそこでも証明は全く扱われていない。

（1）の証明はどのようになされるのかは、数学として厳密に説明すべきである。まず生徒に、中学校１年の数学の最初で、実数の加法と乗法について、結合法則と交換法則と分配法則が成立することを既に教わっていることを思い出させる。そのとき、生徒に次のことを述べるべきである。

「実数の加法と乗法について、実数の全体で結合法則と交換法則と分配法則が成立することは、証明なしに１年生で教えた。０以上の整数の全体で、加法と乗法が自然に定義され、そこでは　結合法則と交換法則と分配法則が成立することは、個数（基数）の考え方を用いて、容易に示すことができる。それを出発点として、数学の長い議論を経るが、実数の全体とそこでの加法と乗法が自然に現れ出る。その加法と乗法が結合法則と交換法則と分配法則を満たすことが証明できる。」（文献[１]と[２]を参照）

その後で、次のような（1）の証明を、教えるか、生徒自身に発見させるべきである。

$a(x+1)+b=(ax+a)+b$　（分配法則による）

$=ax+(a+b)$　（加法の結合法則による）

$=ax+(b+a)$　（加法の交換法則による）

$=(ax+b)+a$　（加法の結合法則による）.

$a(x+r)+b=(ax+ar)+b$　（分配法則による）

$=ax+(ar+b)$　（加法の結合法則による）

$=ax+(b+ar)$　（加法の交換法則による）

$=(ax+b)+ar$　（加法の結合法則による）.

$r \neq 0$ とする。次に１次関数 $y = ax + b$ の、x から $x + r$ までの変化の割合の定義：

$$\frac{(a(x+r)+b)-(ax+b)}{r}$$

を教える。上述の結果より、$(a(x+r)+b)-(ax+b) = ar$ であり、上記の変化の割合を u で表せば、　乗法の交換法則により、$ra = ar = ru$　を得る。$\frac{1}{r}(ra) = \frac{1}{r}(ru)$ となり、乗法の結合法則を用いて、$(\frac{1}{r} \cdot r)a = (\frac{1}{r} \cdot r)u$ を得る。故に $a = 1 \cdot a = (\frac{1}{r} \cdot r)a = (\frac{1}{r} \cdot r)u = 1 \cdot u = u$ となり、$r \neq 0$ に依らず、上記の変化の割合は a であることが証明された。（$ra = ar = ru$ より、$r(u-a) = 0$ を導き、$u = a$ を導いてもよい。）

（1）の理解のためには、現在の教科書の数値実験による感覚的扱いでは、全く不十分であり、（1）の上述の証明が必要である。上述のように短く教えられるので、生徒は教員から必ず教わって欲しい。

（2）の主張のうち、$y = ax + b$ の傾きが a になることはこの第１節で既に示した。y 軸との切片が b であることは $a \cdot 0 + b = b$ ということである。

第２節.　（2）について

［4］の第６８ページで

「１次関数 $y = ax + b$ のグラフは、対応する x 、y の値の組を座標とする点の集まりであり、直線になる。」　　　・・・・・（*）

を教えようとしている。［4］でのこれの説明は、$y = 2x + 5$ と $y = -2x + 4$ の場合に、

$$S = \{x \in \mathbf{Z} \mid -4 \leq x \leq 4\}、$$

$$T = \{x \in \mathbf{Q} \mid 2x \in \mathbf{Z}, -4 \leq x \leq 4\}、$$

$$U = \{x \in \mathbf{Q} \mid 10x \in \mathbf{Z}, -4 \leq x \leq 4\}$$

に対して、x-y 座標平面内の点集合

$$\{(z, 2z+5) \mid z \in S\}、\{(z, 2z+5) \mid z \in T\}、\{(z, 2z+5) \mid z \in U\}$$

$$\{(z, -2z+4) \mid z \in S\}、\{(z, -2z+4) \mid z \in T\}、\{(z, -2z+4) \mid z \in U\}$$

を、x 軸と y 軸を直交するように書き入れた紙の上に書かせて、眼視による実験により、これらが直線上にあると、物理的な実地体験をさせることのみである。

　このような、我々の住んでいる宇宙空間内での実験体験も必要だが、それだけでは、疑いの余地のない正しい真理を獲得したことには全くならない。即ち、（＊）が本当に正しい真理なのか、そのような実験からは、わからない。数学の証明を与えることのみによって、（＊）が正しい真理であることがわかる。実数の加法と乗法が結合法則、交換法則、分配法則を満たし、実数の全体が体になることを既知とするならば、（＊）は中学生にも証明できる。証明を与えなければ、（＊）が正しいか否かわからないことを、生徒に理解させたい。

　中学校２年の生徒にもわかる、（＊）の証明方法を以下に記す。
ここでは、実数の加法と乗法が結合法則、交換法則、分配法則を満たし、実数の全体が体になることを、証明なしに認めることにする。このことも証明できる（[１]と[２]を参照）。

　ユークリッド平面内に２直線 ℓ と m があり、点A で交差しているとする。ℓ_+ を、ℓ の部分集合で、A を端点とするひとつの半直線とする。ℓ_- を、ℓ の部分集合で、A を端点とするもうひとつの半直線を表す。m_+ を、m の部分集合で、A を端点とするひとつの半直線とする。m_- を、m の部分集合で、A を端点とするもうひとつの半直線を表す。

　場合１． 半直線 ℓ_+ 上に点B と点C があり AB<AC を満たしているとする。半直線 m_+ 上に点D と点E があり AD<AE を満たしているとする。直線BD とCE は平行であると仮定する。
このとき　AD:DE=三角形ABD:三角形EDB=三角形ABD:三角形CDB=AB:BC、
即ち $\dfrac{AD}{DE}=\dfrac{AB}{BC}$ を得る。AD+DE=AE、AB+BC=AC なので、これより
$\dfrac{AD}{AE}=\dfrac{AB}{AC}$ と $\dfrac{DE}{AE}=\dfrac{BC}{AC}$ も得る。更に $\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{CE}{AC}$ も得られる。その理由はつぎの通りである。
点D を通り ℓ と平行な直線と直線CE との交点をF とする。DBCF は平行４辺形となる。
よってBD=CF となる。ここで上記の結果を用いると　BD:CE=CF:CE=AD:AE=AB:AC となり、CE×AB=BD×AC となり、$\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{CE}{AC}$ を得る。

　さて直線CE 上の点P が $\dfrac{CP}{AC}=\dfrac{BD}{AB}$ を満たしているとする。しかもP は ℓ で２つに分かれる平面のうち、E を含む半平面内にあるとする。既に $\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{CE}{AC}$ を得ている。故にCE=CP となり、P=E を得る。よってP は直線AD 上にある。

　場合２． 半直線 ℓ_+ 上に点B があり、半直線 ℓ_- 上に点C があるとする。半直線 m_+ 上に点D があり、半直線 m_- 上に点E があるとする。直線BD とCE は平行であると仮定する。この

とき　AD:DE=三角形ABD:三角形EDB=三角形ABD:三角形CDB=AB:BC、

即ち$\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DE}}=\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}$を得る。DE=AD+AE、BC=AB+ACなので、これより$\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AD+AE}}=\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AB+AC}}$を用いて$\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AD}}=\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$を得る。故に$\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{DE}}=\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}$も得る。

点Dを通りℓと平行な直線と直線CEとの交点をFとする。DBCFは平行4辺形となる。よってBD=CFとなる。故にBD:CE=CF:CEとなる。場合1の結果によりCF:CE=AD:AEとなる。AD:AE=AB:ACは既知である。故にBD:CE=AB:AC即ちCE×AB=BD×ACを得る。$\dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{BD}}=\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$と$\dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AB}}$を得た。

さて直線CE上の点Pが$\dfrac{\mathrm{CP}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AB}}$を満たしているとする。しかもPは$\ell$で2つに分かれる平面のうち、Eを含む半平面内にあるとする。既に$\dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AB}}$を得ている。故にCE=CPとなり、P=Eを得る。よってPは直線AD上にある。

（＊）の証明に戻る。$a=0$の時は$y=b$となりx軸と平行な直線である。以後$a\neq 0$とする。直線$y=b$をℓで表す。

αとβを$\alpha\beta\neq 0$かつ$\alpha\neq\beta$を満たす任意の実数とする。直線$x=0$、直線$x=\alpha$、直線$x=\beta$は互いに平行である。A=$(0,b)$、B=(α,b)、C=(β,b)、D=$(\alpha,a\alpha+b)$とおく。直線ADをmで表す。第1節で証明した1次関数$y=ax+b$の変化の割合が一定であることを用いて、この第2節の上記で証明したことにより、点$(\beta,a\beta+b)$は直線AD上にあることがわかる。

逆に、直線AD上の任意の点(u,v)は、第2節で証明したことを使うと

$$\frac{\alpha-0}{u-0}=\frac{(a\alpha+b)-b}{v-b}$$

を満たす。$\alpha\neq 0$に注意して、この等式を、実数の全体は体であり乗法と加法に関して、結合法則、交換法則、分配法則を満たしていることを使って、式変形をすると、$v=au+b$となり、点(u,v)は1次関数$y=ax+b$のグラフ上の点$(u,au+v)$と一致する。

以上で（＊）の証明が完了した。
よって、（2）の証明が完了した。

以上説明したように、（1）と（2）の完全な証明の為に、残っているのは、自然数の全

体から出発して、実数の全体とその演算（加法と乗法）が自然に生まれ出ること、しかも、実数の全体は体となり乗法と加法に関して、結合法則、交換法則、分配法則を満たしていることを、証明するだけである。その証明については、文献[１]と[２]を参照。

注１．　実計量ベクトル空間を基に、ユークリッド空間を定義し、その線型部分多様体として直線や平面を定義するという、大学の数学で教える立場は、本論文では採らなかった。中学生に、如何に教えるべきかを、本論文では記述した。

注２．　上記の場合１と場合２で記述した(幾何学の)内容は、筆者は中学生の時に学習しており、新しいものではない。1次関数の（２）の扱いについては、中学生には、第２節に記述したように、幾何学と関連させて教えるべきであり、そうすると、生徒に、理由・根拠までもよく理解させることができると、筆者は主張した。

文献

［１］ K. Hatada,　On the reason why the product of two negative integers must be positive, In: Geometry, Analysis and Mechanics, John M. Rassias, ed., World Scientific Pub., Singapore, New Jersey, London, 1994, pp. 113-120 and the sheet of corrections of misprints enclosed in the book.

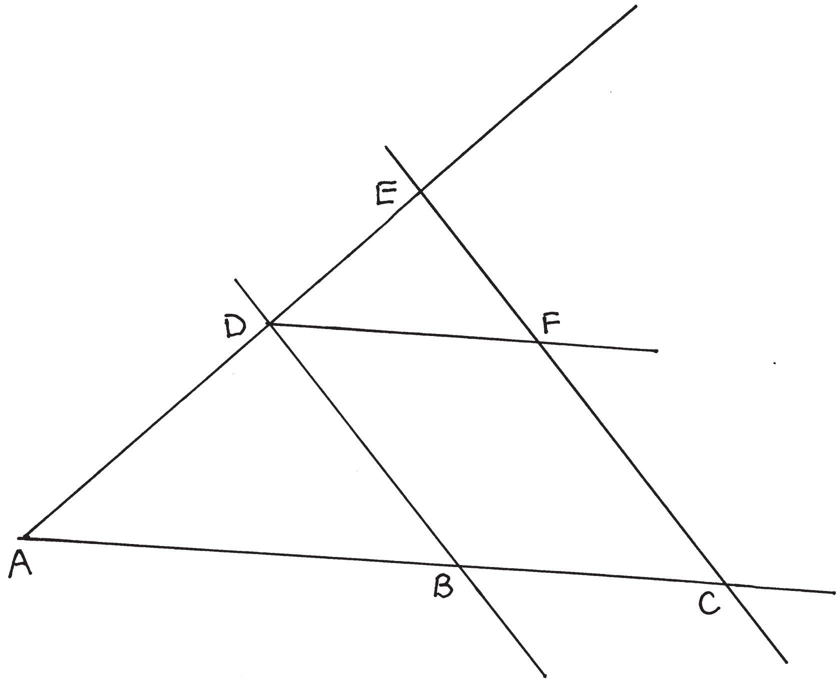
［２］ K. Hatada,　The source of the rational numbers **Q** and rings of fractions $S^{-1}A$,　JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications,　Volume 14,　Number 1,　pp. 97-119, (2009).

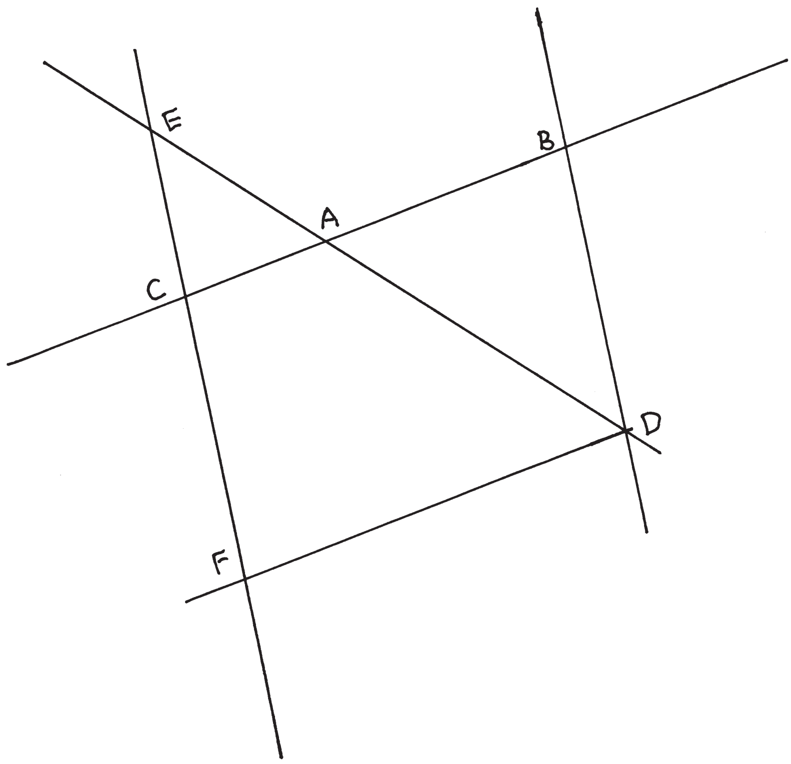
［３］ 吉田稔　ほか　１７名、新版　中学校数学　１、（及び　その指導書）、大日本図書株式会社、東京都中央区銀座、(2006).　（注.　中学校の数学の教科書）

［４］ 吉田稔　ほか　１７名、新版　中学校数学　２、（及び　その指導書）、大日本図書株式会社、東京都中央区銀座、(2006).　（注.　中学校の数学の教科書）

［５］ 吉田稔　ほか　１７名、新版　中学校数学　３、（及び　その指導書）、大日本図書株式会社、東京都中央区銀座、(2006).　（注.　中学校の数学の教科書）

畑田 一幸　(Kazuyuki HATADA)
岐阜大学教育学部数学教室
〒５０１－１１９３　岐阜県岐阜市柳戸１－１
Gifu University
Department of Mathematics
Faculty of Education
1－1,　Yanagido, Gifu City
GIFU 501-1193,　Japan


E
D
F
A
B
C


E
B
A
C
D
F