岐阜大学教育学部研究報告　教育実践研究　第12巻 (2010), 43－45

n 変数のマルコフ方程式

小島和秀，畑田一幸

マルコフ方程式$x^2+y^2+z^2=3xyz$の整数解の理論を、$n\geq 4$変数の方程式

$x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots\cdots+x_n^2=nx_1x_2x_3\cdots x_n$の整数解を求める問題へ拡張することが、[1, p. 290, Exercise1]

に与えられている。本論文では、小島によるその解を記す。第 2 著者の畑田は、[1]の不定方程式に関する部分の研究を、小島に提案した。

§１．不定方程式$x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots\cdots+x_n^2=nx_1x_2x_3\cdots x_n$ （$n\geq 3$，n整数）の正の整数解

定理１・１

不定方程式$x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots\cdots+x_n^2=nx_1x_2x_3\cdots x_n\quad\cdots(1\cdot 1)$　（$n\geq 3, n$整数）の解を

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_n$とすると、$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_{n-1},n\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_{n-1}-\alpha_n$も$(1\cdot 1)$の解となる。

証明

$$\begin{aligned}&\alpha_1^{\ 2}+\alpha_2^{\ 2}+\cdots\cdots+\alpha_{n-1}^{\ \ 2}+(n\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_{n-1}-\alpha_n)^2\\ &=\alpha_1^{\ 2}+\alpha_2^{\ 2}+\cdots\cdots+\alpha_{n-1}^{\ \ 2}+\alpha_n^{\ 2}-2n\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_n+n^2\alpha_1^{\ 2}\alpha_2^{\ 2}\cdots\cdots\alpha_{n-1}^{\ \ 2}\\ &=-n\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_n+n^2\alpha_1^{\ 2}\alpha_2^{\ 2}\cdots\cdots\alpha_{n-1}^{\ \ 2}\\ &=n\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_{n-1}(n\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_{n-1}-\alpha_n),\end{aligned}$$

Q.E.D.

方程式$(1\cdot 1)$は、解として明らかに$x_i=1$（ $i=1,2,\cdots\cdots,n$ ）をもつから、これを基本解と呼ぶ。

定理１・２

不定方程式$x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots\cdots+x_n^2=nx_1x_2x_3\cdots x_n\cdots(1\cdot 1)$　（$n\geq 3, n$整数）の正の整数解が

あるとき、その解は、定理１・１の操作により基本解$x_i=1$（$i=1,2,\cdots\cdots,n$ ）に帰着する。

証明

x_i（$i=1,2,\cdots\cdots,n$ ）を$(1\cdot 1)$の正の整数解とする。

ｉ）$x_1=x_2=\cdots=x_n$のとき

$(1\cdot 1)$より　$nx_1^{\ 2}=nx_1^{\ n}\iff nx_1^{\ 2}(x_1^{n-1}-1)=0$。　$x_1>0$から$x_1=1$である。

よって、解は基本解$x_i=1$（$i=1,2,\cdots\cdots,n$ ）となる。

ii）$x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}\neq x_n$のとき

$(1\cdot 1)$より　$(n-1)x_1^2+x_n^2=nx_1^{\ n-1}x_n$　となるから　$x_1^{\ 2}\mid x_n^{\ 2}$ すなわち　$x_1\mid x_n$ である。

このことから、$x_n=kx_1$　として上式に代入すると　$(n-1)x_1^{\ 2}+k^2x_1^{\ 2}=nkx_1^{\ n}$となる。

条件より $x_1 \neq 0$ であるから、両辺を $x_1 \neq 0$ で割ると、$n-1+k^2 = nkx_1{}^{n-2}$ ･･･(1･2)。

(1･2)は、 $k(nx_1{}^{n-1}-k)=n-1$ と表せるから、 $k|n-1$ である。

$k=n-1$ のとき、これを(1･2)に代入して整理すると $n(n-1)x_1{}^{n-2}=n(n-1)$ となる。

$n \geq 3$ より $n(n-1) \neq 0$ 　ゆえに $x_1{}^{n-2}=1$ すなわち $x_1=1$ である。

したがって、$(1,1,\cdots,1,n-1)$ が解となる。
$k \neq n-1$ のとき $n-1=kN$ と表わせる。ただし、$N>1$, $1<k<n-1$ である。

これを(1･2)に代入すると $kN+k^2=(kN+1)kx_1^{n-2}$ 。

$k \neq 0$ であるから $N+k=(kN+1)x_1^{n-2}$ ･･･(1･3) と表せる。
ここで $kN+1-(N+k)=(k-1)(N-1)>0$ であるから $kN+1>(N+k)$ が成り立つ。
したがって、$(N+k)/(kN+1)<1$ となるから、(1･3)を満たす整数 x_1 は存在しない。
以上より、条件を満たす解は $(1,1,\cdots,1,n-1)$ のみである。

iii) $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ のとき　ただし、少なくともどれかの等号は成立しないものとする。
(1･1)を x_n についての２次方程式と考えて、解の公式に代入すると

$$2x_n = nx_1 \cdot \cdots \cdot x_{n-1} \pm \sqrt{n^2x_1^2x_2^2\cdots x_{n-1}^2 - 4(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2)}$$

と表せる。ここで、根号の中を D とおく。
恒等式 $n^2=(n-2)^2+4(n-1)$ を利用すると

$$D=(n-2)^2x_1^2\cdot\cdots\cdot x_{n-1}^2+4\sum_{i=1}^{n-1}x_i^2\left(\prod_{j=1,j\neq i}^{n-1}x_j^2-1\right)>(n-2)^2x_1^2\cdot\cdots\cdot x_{n-1}^2$$ が成り立つ。

仮に、$2x_n = nx_1\cdot\cdots\cdot x_{n-1}-\sqrt{D}$ を満たすなら $D>(n-2)^2x_1^2\cdot\cdots\cdot x_{n-1}^2$ であるから

$2x_n < 2x_1\cdots x_{n-1}$ すなわち $x_n < x_1 \cdots x_{n-1}$ である。
一方、$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ （どれかの等号は成立しない）から、(1･1)式より

$nx_1x_2x_3\cdots x_n = x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots\cdots+x_n^2 < nx_n^2$ すなわち $x_n > x_1\cdots x_{n-1}$ となり矛盾する。

したがって、$2x_n = nx_1\cdot\cdots\cdot x_{n-1}+\sqrt{D}$ を満たしている。

ここで $\sqrt{D}>0$ であることから $2x_n > nx_1\cdot\cdots\cdot x_{n-1}$ すなわち $x_n > nx_1\cdot\cdots\cdot x_{n-1}-x_n$ となる。

解の和は、下に有界であるから、解 x_i($i=1,2,\cdots\cdots,n$)に対して定理１・１の操作を何回か繰り返せばⅰ)、ⅱ)の解に帰着する。
特に、ⅱ)の解 $x_1=\cdots=x_{n-1}=1$, $x_n=n-1$ は定理１・１の操作によりⅰ)の基本解になる。
以上により　すべての正の整数解は定理１・１の操作により基本解に帰着することがわかる,

Q.E.D.

文献

[1]　L. K. Hua, Introduction to Number Theory, Springer, Berlin-Heidelberg, 1982.

[2]　小島和秀 (K. Kojima),
修士論文:不定方程式に関する整数・有理数の研究, 岐阜大学大学院教育学研究科,
2009年3月.

小島和秀 (Kojima,　Kazuhide)
岐阜大学大学院教育学研究科数学教育専修
現在の所属：岐阜県立加茂高等学校
　　　　　　岐阜県美濃加茂市本郷町2丁目

畑田一幸 (Hatada,　Kazuyuki)
岐阜大学教育学部数学教室
岐阜県岐阜市柳戸1番1