岐阜大学教育学部研究報告　教育実践研究　第12巻（2010），29－41

ある種の3次行列式で与えられる不定方程式

Diophantine equations given by certain determinants of degree 3

小島和秀（K. Kojima），畑田一幸（K. Hatada）

Abstract. In Hua [1, pp.290-291] Euler-Benet theorem on all the rational solutions of $x^3+y^3+z^3+w^3=0$ is proved by giving all the rational solutions (＊) of

$$\begin{vmatrix} W & 3Z & -3Y \\ -Z & W & 3X \\ Y & -X & W \end{vmatrix}=0.$$

We study Diophantine equations：

$$f(X,Y,Z,W)=\begin{vmatrix} W & pX & qY \\ sX & W & rZ \\ tY & uZ & W \end{vmatrix}=0 \quad \text{and} \quad \begin{vmatrix} W & X & Y \\ Z & W & X \\ Y & Z & W \end{vmatrix}=0.$$

Here p, q, r, s, t, u are non-zero rational integers with $pqr+stu \neq 0$.

第2著者の畑田は、Huaの結果(＊)を、他の行列式で与えられる不定方程式に拡張することを、第1著者の小島に提案した。小島によるその結果をまとめたものが本論文である。

§1．不定方程式$W^3+\alpha W(X^2+Y^2+Z^2)+\beta XYZ=0$の有理数解

αとβを整数として

$$W^3+\alpha W(X^2+Y^2+Z^2)+\beta XYZ=0 \quad \cdots(1\cdot1)$$

の有理数解を研究する。

まず整数$n\geq0$に対し、$A_n=\begin{pmatrix} W & nZ & -nY \\ -Z & W & nX \\ Y & -X & W \end{pmatrix}$なる行列を考える。

したがって、$\det A_n=W^3+nW(X^2+Y^2+Z^2)+n(n-1)XYZ$となる。

不定方程式

$$W^3+nW(X^2+Y^2+Z^2)+n(n-1)XYZ=0 \cdots(1\cdot2)$$

を満たす有理数X，Y，Z，Wを求める。

ところで

$n=0$　のとき　(1･2)は　$W^3=0$,

$n=1$　のとき　(1･2)は　$W^3+W(X^2+Y^2+Z^2)=0$,

より解はともに　$W=0$　となるので、以下　$n\geq 2$　として考える。

$P={}^t(a,b,c)$，GCD$(a,b,c)=1$とおくとき、a,b,cについての連立１次方程式$A_nP=\vec{0}$を満たすPが$P=\vec{0}$以外の解を持つためには、$\det A_n=0$となることが必要十分である。すなわち方程式(1･2)である。

$\det A_n=0$を満たすW,X,Y,Zに対して、実際に$A_nP=\vec{0}$なる関係式を用いてX,Y,Zをa,b,cとWで表してみる。

$$A_nP=\vec{0} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} aW+nbZ-ncY=0 \\ -aZ+bW+ncX=0 \\ aY-bX+cW=0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} 0 & nc & -nb \\ -nc & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}=W\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \cdots(1\cdot 3)$$

$$B_n=\begin{pmatrix} 0 & nc & -nb \\ -nc & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$$ とおくと、$\det B_n=-n(n-1)abc$である。

ｉ）$\det B_n\neq 0$　すなわち　$abc\neq 0\,(\because n\geq 2)$　のとき：

(1･3)式にB_n^{-1}を掛けて実際に計算すると

$$X=-\frac{1}{n(n-1)bc}(a^2+nb^2+nc^2)W,\quad Y=-\frac{1}{n(n-1)ca}(a^2+nb^2+n^2c^2)W\quad,$$

$$Z=-\frac{1}{(n-1)ab}(a^2+b^2+nc^2)W.$$

ゆえに　$\rho\in\mathbf{Q}$として$W=-n(n-1)\rho abc$とおけば

$$X=\rho a(a^2+nb^2+nc^2),\ Y=\rho b(a^2+nb^2+n^2c^2),\ Z=n\rho c(a^2+b^2+nc^2)\quad\cdots(1\cdot 4)$$

ⅱ）$\det B_n=0$　すなわち　$abc=0$　のとき：

$a=0$とすれば　(1･3)より

$$\begin{cases} nbZ-ncY=0 \\ bW+ncX=0 \\ -bX+cW=0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} bZ-cY=0 \\ (b^2+nc^2)X=0 \\ (b^2+nc^2)W=0 \end{cases} \quad\cdots(1\cdot 5)$$

$b\neq 0,c=0$のとき

(1･5)より　$X=Z=W=0$かつYは任意　となる。一方、(1･4)に代入すると$X=Z=W=0$かつ$Y=n\rho b^3$　となるから、このとき(1･4)は成立している。

$b=0,c\neq 0$のとき

(1･5)より　$X=Y=W=0$かつZは任意　となる。一方、(1･4)に代入すると$X=Y=W=0$

かつ$Z=n^2\rho c^3$　となるから、このときも(1･4)は成立している。

$b\neq 0, c\neq 0$のとき

(1･5)の１式より　Y, Zは　$cY=bZ$　を満たす。

一方(1･4)を用いると　$Y=\rho b(nb^2+n^2c^2)$,　$Z=n\rho c(b^2+nc^2)$　より　$cY=bZ$　を満たす。

(1･5)の2, 3式より　$X=W=0$　を満たす。一方(1･4)を用いると　$X=W=0$　となる。

$a\neq 0$かつ「$b=0$または$c=0$」のときも同様に考察すればいずれの場合も(1･4)を満たしている。

以上の考察により、次の定理が得られる。

定理１・１

方程式　$W^3+nW(X^2+Y^2+Z^2)+n(n-1)XYZ=0$　（nは２以上の整数）の有理数解は

$$W=-n(n-1)\rho abc,\qquad X=\rho a(a^2+nb^2+nc^2),$$
$$Y=\rho b(a^2+nb^2+n^2c^2),\quad Z=n\rho c(a^2+b^2+nc^2)$$

で与えられる。ここで　$\rho\in\mathbf{Q}$,　a, b, cは$\mathrm{GCD}(a,b,c)=1$の整数である。

次に、定理１・１において、$n<0$の場合について考える。

このとき、対角成分に対する対称な部分が同符号となるので有理数解は一通りに表わせなくなる。まずは、n=−1の場合の有理数解を具体的に求める。基本的な方法はこれまでと同様なので要点のみ記述する。

$A=\begin{pmatrix} W & Z & Y \\ Z & W & X \\ Y & X & W \end{pmatrix}$,　$P=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$　を考え、$\det A=W^3-W(X^2+Y^2+Z^2)+2XYZ=0$　なる不定方程式の有理数解を調べる。

a, b, cについての連立１次方程式$AP=\vec{0}$を満たすPが$P=\vec{0}$以外の解を持つためには、

$\det A=0$となることが必要十分である。$\det A=0$を満たすW, X, Y, Zに対して、実際に$AP=\vec{0}$なる関係式を用いてX, Y, Zをa, b, cとWで表す。

$$AP=\vec{0}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases} aW+bZ+cY=0 \\ aZ+bW+cX=0 \\ aY+bX+cW=0 \end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{pmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}=W\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\quad\cdots(1\cdot 6)$$

$B=\begin{pmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{pmatrix}$とおくと、$\det B=2abc$である。

$\det B\neq 0$　すなわち　$abc\neq 0$　のとき(1･6)の３式にB^{-1}を掛けて実際に計算し

$W=-2\rho abc$（$\rho\in\mathbf{Q}$）とおけば

$$X=\rho a(-a^2+b^2+c^2),\ Y=\rho b(a^2-b^2+c^2),\ Z=\rho c(a^2+b^2-c^2)\cdots(1\cdot 7)$$

とあらわせる。

$\det B=0$　すなわち　$abc=0$　のとき

$a=b=0$，$c\neq 0$とすれば　(1･6)より　$X=Y=W=0$，Zは任意。

$a=c=0$，$b\neq 0$とすれば　(1･6)より　$X=Z=W=0$，Yは任意。

$b=c=0$，$a\neq 0$とすれば　(1･6)より　$Y=Z=W=0$，Xは任意。

$a=0$，$b\neq 0$，$c\neq 0$とすれば　(1･6)より　$\begin{cases} bZ+cY=0 \\ bW+cX=0 \\ bX+cW=0 \end{cases}$　･･･(1･8)

また、このとき(1･7)を代入すると　$W=X=0$，$Y=\rho b(-b^2+c^2)$，$Z=\rho c(b^2-c^2)$　となる。

$|b|\neq|c|$のとき

(1･8)の１式より　$bZ=-cY$。

(1･8)の2, 3式より　$(b^2-c^2)X=(b^2-c^2)W=0$　であり　$|b|\neq|c|$より　$W=X=0$

したがって、これらは(1･7)を満たしている。

$|b|=|c|$のとき

(1･8)より　$Y=\pm Z$，$X=\pm W$。

(1･7)を代入すると　$W=X=Y=Z=0$　のみが解となる。

以上より

$a=0$，$b\neq 0$，$c\neq 0$のとき　有理数解は$X\pm W=0$，$Y\pm Z=0$(複号同順)を満たす任意の有理数W, X, Y, Z。

$b=0$，$c\neq 0$，$a\neq 0$　または　$c=0$，$a\neq 0$，$b\neq 0$の場合にも同様なことがわかる。

以上のことをまとめると。

定理１・２

方程式　$W^3-W(X^2+Y^2+Z^2)+2XYZ=0$　の有理数解の主要部分は

$W=-2\rho abc$，$X=\rho a(-a^2+b^2+c^2)$，$Y=\rho b(a^2-b^2+c^2)$，$Z=\rho c(a^2+b^2-c^2)$

で与えられる。ここで　$\rho\in\mathbf{Q}$，　a, b, cは$\mathrm{GCD}(a,b,c)=1$の整数である。

また　$a=0$，$|b|=|c|$のとき　$X=\pm W$，$Y=\pm Z$，

$b=0$，$|c|=|a|$のとき　$X=\pm Z$，$Y=\pm W$，

$c=0$，$|a|=|b|$のとき　$X=\pm Y$，$Z=\pm W$　(すべて複号同順)

を満たす任意の有理数X, Y, Z, Wも有理数解となる。

以上で、すべての有理数解は尽くされる。

さらに、定理１・１における$n<0$の場合についても有理数解を求めてみる。

(1･3)において$n<0$としたとき、$n=-m$とすれば$m>0$であり、(1･3)式は

$$A_{-m}P=\vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} aW-mbZ+mcY=0 \\ -aZ+bW-mcX=0 \\ aY-bX+cW=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -mc & mb \\ mc & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}=W\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \cdots(1\cdot 9)$$

$B_{-m}=\begin{pmatrix} 0 & -mc & mb \\ mc & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$, $\det B_{-m}=-m(m+1)abc$　と書き直すことができる。

$\det B_{-m}=-m(m+1)abc\neq 0$のときは定理１・１と同様なので
$\det B_{-m}=-m(m+1)abc=0$　すなわち　$abc=0$　のときのみを考察する。
$a=0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$　のとき

$$\begin{cases} -mbZ+mcY=0 \\ bW-mcX=0 \\ -bX+cW=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} bZ-cY=0 \\ (b^2-mc^2)X=0 \\ (b^2-mc^2)W=0 \end{cases} \quad \cdots(1\cdot 10)$$

$b^2-mc^2\neq 0$のとき　$cY=bZ$かつ$W=X=0$。

$b^2-mc^2=0$のとき　すなわち　$|b|=\sqrt{m}|c|$のとき：

(1･10)の１式より　$Y=\pm\sqrt{m}\,Z$, 2, 3 式より　$W=\pm\sqrt{m}\,X$　となる。

ただし、$\sqrt{m}$は整数でないといけないので、mが平方数のときにはこの状態であり、そうでないときには、$b^2-mc^2\neq 0$となる。

$b=0$, $c\neq 0$, $a\neq 0$　または　$c=0$, $a\neq 0$, $b\neq 0$の場合にも同様なことがわかる。
以上のことをまとめると

定理１・３

方程式　$W^3-mW(X^2+Y^2+Z^2)+m(m+1)XYZ=0$　（mは正の整数）の有理数解の主要部分は、$\rho\in\mathbf{Q}$,　a,b,cは$\mathrm{GCD}(a,b,c)=1$の整数として

$W=-m(m+1)\rho abc$,　　　　$X=\rho a(a^2-mb^2-mc^2)$,
$Y=\rho b(a^2-mb^2+m^2c^2)$,　　$Z=-m\rho c(a^2+b^2-mc^2)$

で与えられる。
さらにmが完全平方数のとき
$Y=\pm\sqrt{m}\,Z$, $W=\pm\sqrt{m}\,X$　または　$Z=\pm\sqrt{m}\,X$, $W=\pm\sqrt{m}\,Y$　または　$X=\pm\sqrt{m}\,Y$, $W=\pm\sqrt{m}\,Y$
となる任意の有理数X,Y,Z,Wも解となる。
以上ですべての有理数解は与えられる。

§２. 行列の対角成分以外をスカラー倍で変化させた場合の方程式の有理数解

§１の行列でさらに係数を変化させて得られる３次方程式の有理数解について考察した。
§１と同様な文字を利用する。

考察１

$A_1=\begin{pmatrix} W & X & 2Y \\ -X & W & 3Z \\ -2Y & -3Z & W \end{pmatrix}$ なる行列において $\det A_1 = W^3 + W(X^2+4Y^2+9Z^2)=0 \cdots (2\cdot 1)$

$(2\cdot 1)$ は trivial な有理数解 $W=0$ のみをもつ。（X, Y, Z は任意の有理数。）

考察２

$A_2=\begin{pmatrix} W & X & 2Y \\ -X & W & 3Z \\ -Y & -Z & W \end{pmatrix}$ なる行列において $\det A_2 = W^3 + W(X^2+2Y^2+3Z^2) - XYZ=0 \cdots (2\cdot 2)$

について、$P={}^t(a,b,c)$　（a,b,c は $\mathrm{GCD}(a,b,c)=1$ の整数）とおき $A_2P=\vec{0}$ を解く。

$$A_2P=\vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} aW+bX+2cY=0 \\ -aX+bW+3cZ=0 \\ -aY-bZ+cW=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} b & 2c & 0 \\ -a & 0 & 3c \\ 0 & -a & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = -W\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \cdots (2\cdot 3)$$

$\begin{vmatrix} b & 2c & 0 \\ -a & 0 & 3c \\ 0 & -a & -b \end{vmatrix} = abc$　から　$abc \neq 0$　のとき　$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \dfrac{-W}{abc}\begin{pmatrix} 3ca & 2bc & -6c^2 \\ -ab & -b^2 & -3bc \\ a^2 & ab & 2ac \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

したがって

$\rho \in \mathbf{Q}$　として　$W=-\rho abc$　とおけば

$X=\rho c(3a^2+2b^2+6c^2)$，$Y=\rho b(-a^2-b^2-3c^2)$，$Z=\rho c(a^2+b^2+2c^2)$ $\cdots$ $(2\cdot 4)$

と表せる。

$abc=0$ のとき

$a=b=0$，$c\neq 0$ とすれば　$(2\cdot 3)$ より　$Y=Z=W=0$，X は任意。

$a=c=0$，$b\neq 0$ とすれば　$(2\cdot 3)$ より　$X=Z=W=0$，Y は任意。

$b=c=0$，$a\neq 0$ とすれば　$(2\cdot 3)$ より　$X=Y=W=0$，Z は任意。

したがって、これらはすべて $(2\cdot 4)$ を満たしている。

$a=0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$ とすれば　(2·3)より $\begin{cases} bX+2cY=0 \\ bW+3cZ=0 \\ -bZ+cW=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bX=-2cY \\ (b^2+3c^2)Z=0 \\ (b^2+3c^2)W=0 \end{cases}$

$b^2+3c^2\neq 0$ であるから $Z=W=0$ かつ $bX=-2cY$。
ゆえにこれは(2·4)を満たしている。

$b=0$, $c\neq 0$, $a\neq 0$ とすれば　(2·3)より $\begin{cases} aW+2cY=0 \\ -aX+3cZ=0 \\ -aY+cW=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} aX=3cZ \\ (a^2+2c^2)Y=0 \\ (a^2+2c^2)W=0 \end{cases}$

$a^2+2c^2\neq 0$　であるから　$Y=W=0$ かつ $abX=3cZ$。
ゆえに、これは(2·4)を満たしている

$c=0$, $a\neq 0$, $b\neq 0$ とすれば　(2·3)より $\begin{cases} aW+bX=0 \\ -aX+bW=0 \\ -aY-bZ=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} aY=-bZ \\ (a^2+b^2)X=0 \\ (a^2+b^2)W=0 \end{cases}$

$a^2+b^2\neq 0$　であるから　$X=W=0$ かつ $aY=-bZ$　ゆえにこれは(2·4)を満たしている。
以上から方程式(2·2)の有理数解は一意的に表わすことができ、次のようにまとめられる。

定理２・１
方程式　$W^3+W(X^2+2Y^2+3Z^2)-XYZ=0$　の有理数解は
$W=-\rho abc$,　　　$X=\rho c(3a^2+2b^2+6c^2)$,
$Y=\rho b(-a^2-b^2-3c^2)$,　　$Z=\rho c(a^2+b^2+2c^2)$
と表せる。ここで、$\rho\in\mathbf{Q}$,　a,b,c は $\mathrm{GCD}(a,b,c)=1$ の整数である。

考察３

$$A_3=\begin{pmatrix} W & X & 2Y \\ X & W & 3Z \\ Y & Z & W \end{pmatrix}$$ なる行列において $\det A_3=W^3-W(X^2+2Y^2+3Z^2)+5XYZ=0\cdots(2\cdot5)$

同様に $P={}^t(a,b,c)$　(a,b,c は $\mathrm{GCD}(a,b,c)=1$ の整数)とおき $A_3P=\vec{0}$ を解く。

$$A_3P=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} aW+bX+2cY=0 \\ aX+bW+3cZ=0 \\ aY+bZ+cW=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b & 2c & 0 \\ a & 0 & 3c \\ 0 & a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}=-W\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdots(2\cdot6)$$

$\begin{vmatrix} b & 2c & 0 \\ a & 0 & 3c \\ 0 & a & b \end{vmatrix}=-6abc$　から　$abc\neq 0$　のとき　$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}=\dfrac{W}{6abc}\begin{pmatrix} -3ca & -2bc & 6c^2 \\ -ab & b^2 & -3bc \\ a^2 & -ab & -2ac \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$。

したがって　$\rho \in \mathbf{Q}$　として　$W = 6\rho abc$　とおけば

$X = \rho c(-3a^2 - 2b^2 + 6c^2)$，　$Y = \rho b(-a^2 + b^2 - 3c^2)$，　$Z = \rho a(a^2 - b^2 - 2c^2) \cdots (2\cdot 7)$

と表せる。

$abc = 0$のとき

$a = b = 0$，$c \neq 0$とすれば　(2･6)より　$Y = Z = W = 0$，Xは任意。

$a = c = 0$，$b \neq 0$とすれば　(2･6)より　$X = Z = W = 0$，Yは任意。

$b = c = 0$，$a \neq 0$とすれば　(2･6)より　$X = Y = W = 0$，Zは任意。

したがって、これらはすべて(2･7)を満たしている。

$a = 0$，$b \neq 0$，$c \neq 0$とすれば　(2･6)より　$\begin{cases} bX + 2cY = 0 \\ bW + 3cZ = 0 \\ bZ + cW = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bX = -2cY \\ (b^2 - 3c^2)Z = 0 \\ (b^2 - 3c^2)W = 0 \end{cases}$

b，cは整数より　$b^2 - 3c^2 \neq 0$　よって　$Z = W = 0$かつ$bX = -2cY$。

ゆえにこれは(2･7)を満たしている。

$b = 0$，$c \neq 0$，$a \neq 0$とすれば　(2･6)より　$\begin{cases} aW + 2cY = 0 \\ aX + 3cZ = 0 \\ aY + cW = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} aX = -3cZ \\ (a^2 - 2c^2)Y = 0 \\ (a^2 - 2c^2)W = 0 \end{cases}$

a，cは整数より　$a^2 - 2c^2 \neq 0$　であるから　$Y = W = 0$かつ$abX = -3cZ$。

ゆえにこれは(2･7)を満たしている

$c = 0$，$a \neq 0$，$b \neq 0$とすれば　(2･6)より　$\begin{cases} aW + bX = 0 \\ aX + bW = 0 \\ aY + bZ = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} aY = -bZ \\ (a^2 - b^2)X = 0 \\ (a^2 - b^2)W = 0 \end{cases}$

$|a| \neq |b|$ならば$a^2 \neq b^2$から$X = W = 0$かつ$aY = -bZ$。　ゆえにこれは(2･7)を満たしている。

$|a| = |b|$ならば$a^2 = b^2$となるから　$W = \pm X$，$Z = \pm Y$　を満たす任意の有理数X, Y, Z, Wである。

以上まとめると次のようになる。

定理２・２

方程式　$W^3 - W(X^2 + 2Y^2 + 3Z^2) + 5XYZ = 0$　の有理数解の主要部分は

$W = 6\rho abc$，　　　$X = \rho c(-3a^2 - 2b^2 + 6c^2)$，

$Y = \rho b(-a^2 + b^2 - 3c^2)$，　　$Z = \rho a(a^2 - b^2 - 2c^2)$

と表せる。ここで、$\rho \in \mathbf{Q}$，　a, b, cは$\mathrm{GCD}(a,b,c) = 1$の整数である。

また、$|a| = |b|$，$c = 0$のとき、$W = \pm X$，$Z = \pm Y$（複号同順）　を満たす任意の有理数X, Y, Z, Wも解となる。

以上がすべての有理数解である。

上記の３つの考察と§１と§２で得られた３次方程式は、行列 A_k タイプの行列式 $\det A_k = 0$ から作られている。これらの結果をもとにさらに一般化したものを考察した。

p, q, r, s, t, u を整数とする。

$A = \begin{pmatrix} W & pX & qY \\ sX & W & rZ \\ tY & uZ & W \end{pmatrix}$ なる行列において解が trivial にならないように $pqr + stu \neq 0$ を仮定する。

このとき　$\det A = W^3 - W(psX^2 + qtY^2 + ruZ^2) + (prt + qsu)XYZ$　となるので
方程式　$W^3 - W(psX^2 + qtY^2 + ruZ^2) + (prt + qsu)XYZ = 0$　の有理数解をこれまでと同様に

$P = {}^t(a, b, c)$（a, b, c は $\mathrm{GCD}(a, b, c) = 1$ の整数）とおき、$AP = \vec{0}$ を解くことにより求める。

$$AP = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} aW + pbX + qcY = 0 \\ saX + bW + rcZ = 0 \\ taY + ubZ + cW = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} pb & qc & 0 \\ sa & 0 & rc \\ 0 & ta & ub \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = -W\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \cdots(2\cdot 8)$$

$\begin{vmatrix} pb & qc & 0 \\ sa & 0 & rc \\ 0 & ta & ub \end{vmatrix} = -(prt + qsu)abc$　であるから次のように場合分けして考える。

ⅰ）　$abc \neq 0$　のとき

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = -\frac{W}{(prt + qsu)abc}\begin{pmatrix} -rtca & -qubc & qrc^2 \\ -suab & pub^2 & -prbc \\ sta^2 & -ptab & -sqac \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

したがって

$\rho \in \mathbf{Q}$　として　$W = -\rho(prt + qsu)abc$　とおけば

$X = \rho c(rta^2 + qub^2 - qrc^2)$，$Y = \rho b(sua^2 - pub^2 + prc^2)$，$Z = \rho a(-sta^2 + ptb^2 + sqc^2) \cdots(2\cdot 9)$

と表せる。

ⅱ）　$abc = 0$ のとき

[1] $a = b = c = 0$　ならば　$X = Y = Z = W = 0$　と考えれば(2･9)を満たす。

[2] $a = b = 0$，$c \neq 0$ とすれば　(2･8)より　$Y = Z = W = 0$，X は任意。

$a = c = 0$，$b \neq 0$ とすれば　(2･8)より　$X = Z = W = 0$，Y は任意。

$b = c = 0$，$a \neq 0$ とすれば　(2･8)より　$X = Y = W = 0$，Z は任意。

したがって、これらはすべて(2･9)を満たしている。

[3] $a=0$，$b\neq 0$，$c\neq 0$とすれば　(2･8)より　$\begin{cases} pbX+qcY=0 \\ bW+rcZ=0 \\ ubZ+cW=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} pbX=-qcY \\ (ub^2-rc^2)Z=0 \\ (ub^2-rc^2)W=0 \end{cases}$

$ub^2-rc^2\neq 0$　ならば　$Z=W=0$かつ$pbX=-qcY$。
ゆえにこれは(2･9)を満たしている。
$ub^2-rc^2=0$　のとき　u,rが異符号なら　$b=c=0$　より条件に不適。
ゆえに　u,rは同符号としてよい。
このとき　$bW=-rcZ$を満たす任意の有理数W，Zが解となる。

$ub^2-rc^2=0$　より　$\sqrt{|u|}\,b=\pm\sqrt{|r|}\,c$。

ここで　$rc=\pm\sqrt{ru}\,b$　より　$bW=\pm\sqrt{ru}\,bZ$　よって　$W=\pm\sqrt{ru}\,Z$。

したがって　W，Zは、$ru>0$，ruが平方数となるときのみ有理数となり　$W=\pm\sqrt{ru}\,Z$　を満たす。

[4] $b=0$，$c\neq 0$，$a\neq 0$とすれば　(2･8)より　$\begin{cases} aW+qcY=0 \\ saX+rcZ=0 \\ taY+cW=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} saX=-rcZ \\ (ta^2-qc^2)Y=0 \\ (ta^2-qc^2)W=0 \end{cases}$

$ta^2-qc^2\neq 0$　ならば　$Y=W=0$かつ$saX=-rcZ$。
ゆえにこれは(2･9)を満たしている。
$ta^2-qc^2=0$　のとき　u,rが異符号なら　$a=c=0$　より条件に不適。
ゆえに　t，qは同符号としてよい。
このとき　$cW=-taY$を満たす任意の有理数Y，Wが解となる。

$ta^2-qc^2=0$　より　$\sqrt{|t|}\,a=\pm\sqrt{|q|}\,c$。

ここで　$ta=\pm\sqrt{tq}\,c$　より　$cW=\pm\sqrt{tq}\,cY$　よって　$W=\pm\sqrt{tq}\,Y$。

したがって　Y，Wは　$tq>0$，tqが平方数となるときのみ有理数となり　$W=\pm\sqrt{tq}\,Y$　を満たす。

[5] $c=0$，$a\neq 0$，$b\neq 0$とすれば　(2･8)より　$\begin{cases} aW+pbX=0 \\ saX+bW=0 \\ taY+ubZ=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} taY=-ubZ \\ (sa^2-pb^2)X=0 \\ (sa^2-pb^2)W=0 \end{cases}$

$sa^2-pb^2\neq 0$　ならば　$X=W=0$かつ$taY=-ubZ$。
ゆえにこれは(2･9)を満たしている。

$sa^2-pb^2=0$　のとき　s，p が異符号なら　$a=b=0$　より条件に不適。
ゆえに　s，p は同符号としてよい。
このとき　$bW=saX$ を満たす任意の有理数 X，W が解となる。

$sa^2-pb^2=0$　より　$\sqrt{|s|}\,a=\pm\sqrt{|p|}\,b$。

ここで　$sa=\pm\sqrt{sp}\,b$　より　$bW=\pm\sqrt{sp}\,bX$　よって　$W=\pm\sqrt{sp}\,X$。

したがって　X，W は　$sp>0$，sp が平方数となるときのみ有理数となり　$W=\pm\sqrt{sp}\,X$

を満たす。
以上をまとめると次のようになる。

定理２・３
p,q,r,s,t,u をそれぞれ 0 でない整数で、$pqr+stu\neq 0$ を満たすものとする。
方程式　$W^3-W(psX^2+qtY^2+ruZ^2)+(prt+qsu)XYZ=0$　の有理数解の主要部分は

$$W=-\rho(prt+qsu)abc,\qquad X=\rho c(rta^2+qub^2-qrc^2),$$
$$Y=\rho b(sua^2-pub^2+prc^2),\qquad Z=\rho a(-sta^2+ptb^2+sqc^2)$$

で与えられる。ここで、$\rho\in\mathbf{Q}$，a,b,c は $\mathrm{GCD}(a,b,c)=1$ を満たす整数である。
そして、その他のすべての有理数解は、

$a=0$，$b\neq 0$，$c\neq 0$ のとき　$pbX=-qcY$ かつ $W=\pm\sqrt{ru}\,Z$　($ru>0$，ru が平方数)

$b=0$，$c\neq 0$，$a\neq 0$ のとき　$saX=-rcZ$ かつ $W=\pm\sqrt{tq}\,Y$　($tq>0$，tq が平方数)

$c=0$，$a\neq 0$，$b\neq 0$ のとき　$taY=-ubZ$ かつ $W=\pm\sqrt{sp}\,X$　($sp>0$，sp が平方数)

を満たす任意の有理数 X,Y,Z,W である。

§３. 対称行列のスカラー変形ではない行列から得られる方程式

行列 A の未知数の場所を変えた次の方程式 $\det A=0$ の研究を、第２筆者の畑田が提案して、第１筆者の小島が次のように解答した。

$A=\begin{pmatrix}W&X&Y\\Z&W&X\\Y&Z&W\end{pmatrix}$ なる行列に関して、$\det A=W^3-W(2XZ+Y^2)+X^2Y+YZ^2=0$　$\cdots(3\cdot 1)$

$\det A=0$ なので $P={}^t(a,b,c)$　(a,b,c は $\mathrm{GCD}(a,b,c)=1$ の整数)とおき $AP=\vec{0}$ を解く。

条件より non-trivial な解を持つ。

$$AP=\vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} aW+bX+cY=0 \\ aZ+bW+cX=0 \\ aY+bZ+cW=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}=-W\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \cdots(3\cdot 2)$$

ここで $\begin{vmatrix} b & c & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & a & b \end{vmatrix}=-b(a^2+c^2)$ である。

ｉ）$-b(a^2+c^2)\neq 0$ のとき

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}=\frac{W}{b(a^2+c^2)}\begin{pmatrix} -a^2 & -bc & ac \\ -bc & b^2 & -ab \\ ac & -ab & -c^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

したがって　$\rho\in\mathbf{Q}$　として　$W=-\rho b(a^2+c^2)$　とおけば
$X=\rho(a^3+b^2c-ac^2)$，　$Y=\rho b(ac-b^2+ac)$，　$Z=\rho(-a^2c+a^2b+c^3)$　$\cdots(3\cdot 3)$
と表せる。

ⅱ）$b=0$のとき
$a=b=0$，$c\neq 0$とすれば　(3･2)より　$X=Y=W=0$，Zは任意。
$b=c=0$，$a\neq 0$とすれば　(3･2)より　$Y=Z=W=0$，Xは任意。
したがって、これらはすべて(3･3)を満たしている。

$b=0$，$c\neq 0$，$a\neq 0$とすれば　$\begin{cases} aW+cY=0 \\ cX+aZ=0 \\ aY+cW=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} cX=-aZ \\ (a^2-c^2)Y=0 \\ (a^2-c^2)W=0 \end{cases}$

$a\neq\pm c$　ならば　$Y=W=0$かつ$cX=-aZ$　ゆえにこれは(3･3)を満たしている。
$a=\pm c$　ならば　$Y=\pm W$かつ$X=\pm Z$　を満たす任意の有理数となる。

ⅲ）$a^2+c^2=0$のとき
$a=c=0$，$b\neq 0$　が成り立つから　$X=Z=W=0$，Yは任意の有理数となる。
これは(3･3)を満たしている。

以上をまとめると次のようになる。

定理３・１
方程式　$W^3-W(2XZ+Y^2)+X^2Y+YZ^2=0$　の有理数解の主要部分は
$W=-\rho b(a^2+c^2)$，　　$X=\rho(a^3+b^2c-ac^2)$，
$Y=\rho b(ac-b^2+ac)$，　　$Z=\rho(-a^2c+a^2b+c^3)$
で与えられる。ここで、$\rho\in\mathbf{Q}$，　a,b,cはGCD$(a,b,c)=1$を満たす整数である。

これ以外のすべての有理数解は、$|a|=|c|$かつ$b=0$のときの、$W=\pm Y$，$Z=\pm X$（複号同順）を

満たす任意の有理数 X, Y, Z, W である。

以上のように、行列の行列式を０とおくことで、様々な不定方程式が得られる。§２で考察したように、定理３・１の不定方程式においても、行列に様々な整数係数をつければ新たな不定方程式が得られ、その有理数解を記述することができよう。

文献

[1]　L. K. Hua, Introduction to Number Theory, Springer, Berlin-Heidelberg, 1982.

[2]　小島和秀（K. Kojima),
修士論文：不定方程式に関する整数・有理数の研究，岐阜大学大学院教育学研究科，2009 年 3 月.

小島和秀（Kojima,　Kazuhide）
岐阜大学大学院教育学研究科数学教育専修
現在の所属：岐阜県立加茂高等学校
　　　　　　岐阜県美濃加茂市本郷町２丁目

畑田一幸（Hatada,　Kazuyuki）
岐阜大学教育学部数学教室
岐阜県岐阜市柳戸１番１