或る不定方程式の指導方法について

Teaching how to solve certain Diophantine equations

畑田 一幸　（Hatada Kazuyuki）
岐阜大学教育学部数学教室
〒501-1193 岐阜県岐阜市柳戸１－１

高校生のための大学受験用の問題集に載っている或る不定方程式について、どう指導すべきかを考察する。

１.

問題１． $0 < x \le y \le z$ かつ $xyz = x + y + z$ を満たすすべての整数解を求めよ。

（これは２００２年の同志社大学経済学部の入試で出題されたという。）しかし昭和４２年に本屋で売られていた問題集に、この問題と（同一かまたは）よく似た類題があったことを覚えているので、昔からよく知られている入試問題例の一つということができるだろう。

問題１に対し、初めてこの問題を見た人がすぐには思いつかない（であろう）解法が、受験参考書の解答例に載っている。（昭和４２年当時の受験本にも載っていたけれども、安田亨　著　「入試数学伝説の良問１００」、講談社、２００３年第１刷　の第６６ページ　で見ることができる。）それは、大体次の解答例１のようなものである。

解答例１． 与式を$1 = \dfrac{xyz}{xyz} = \dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{yz} + \dfrac{1}{zx} \le 3x^{-2}$　と変形し、$x = 1$を得る。これを与式に代入して$1 = \dfrac{yz}{yz} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{yz} + \dfrac{1}{z} \le 3y^{-1}$を得て$y \in \{1, 2, 3\}$となる。与式に代入し、$x = 1, y = 1$の場合は不適、$x = 1, y = 3$の場合も不適なことが分かる。残りの$x = 1, y = 2$のときは$z = 3$となり、解答は$x = 1, y = 2, z = 3$であることが分かる。

確かにこの解法を知っていれば時間のロスなしに迅速に正解に到達するわけで、予備校や塾がこの解法を教えるのはもっともなことである。しかし、生徒・学生に、この問題はこのように解くのです、覚えなさいと言うだけでは、試行錯誤を通して正しい解答に達する道を発見するという、本来どうしてもしなけ

ればならない「数学の勉強」をさせないことになる。数学は、未解決の問題に対して、人間が正解に到達する道を探し出し、そしてそれを実行するという学問なのである。解法を教えてそれを覚えるのでは、数学を行ってはいない。

問題１の型の問題が大学入試に出たとしよう。解き方を予備校・塾で教わった者がその通りに速く解くのに対し、初めてその問題を見た者は時間をかけて解法を独自に見出し、それからそれを実行するであろう。そのとき、解法を思いついた後者の方が、数学を実際に考えて行ったのにもかかわらず、暗記勉強で解法を知っていた者に負けてしまう結果になるのはよくないことである。（現行の入学試験では、与えられた解答時間が短いので、そのようになる可能性が高いのではないだろうか。）

さて、問題１は受験参考書や予備校・塾の解答方法を使わなくても、特別な技法を使わなくても、地道に扱えば、必ず解けることを以下に示す。数学を学ぶ者はこれも知っておくべきである。

解答例２．与式より $z(xy-1)=x+y$ を得る。$xy=1$ ならば解なし。ゆえに $y\le\dfrac{x+y}{xy-1}=z$。ゆえに $x(y^2-1)\le 2y$。$y^2-1=0$ ならば、$x=1, y=1$ となり解はない。ゆえに $x\le\dfrac{2y}{y^2-1}$ and $2\le y$ となる。実数の関数 $\dfrac{2t}{t^2-1}$ with $2\le t$ は単調減少な関数である。ゆえに $x\le\dfrac{4}{2^2-1}=\dfrac{4}{3}.$ ゆえに $x=1$。$y\le\dfrac{1+y}{y-1}$ に戻り $y>1$ に注意して $y^2-2y-1\le 0$ を得る。ゆえに $2\le y\le 1+\sqrt{2}$ となり $y=2$ を得る。そして $z=3$ となる。

解答例３．$yz=1$ ならば $x=y=z=1$ となるがこれは解ではない。ゆえに $yz>1$ で $1\le x=\dfrac{y+z}{yz-1}\le y$ を得る。ゆえに $yz-1\le y+z$ となり $y\le\dfrac{z+1}{z-1}=1+\dfrac{2}{z-1}\le 3$ を得る。$y=3, x=3$ は解を与えない。$y=3, x=2$ は解を与えない。$y=3, x=1$ は解を与えない。$y=2, x=2$ は解を与えない。$y=2, x=1$ のとき $z=3$ となり、これが唯１通りの解である。

最近の大学受験生の間では、問題１の型の問題に対して、予備校・塾・受験参考書による模範解答（解答例１）を知っているのが常識となっているようで、或る予備校の模擬試験では、確率の問題中で問題１の型の不定方程式の数値計

算を多数実行させて、確率や期待値を実際に求めさせている。その解法を知らない受験生は、その不定方程式を解くことから考え始めるので、時間が足りずにその確率の問題は０点となるように、その問題は作られている。

　試験の受験時間は短いことを考えると、このような問題を出題することは、受験生の数学の勉強を暗記型に導くものである。このような問題は本来出題すべき数学の問題から外れたものであり、時間内に行うゲーム感覚のプラクチスと言うべきものである。数学の試験が、体操やフィギャースケート等の競技またはピアノ演奏会等と同じものになったとしたら、「数学の学力」を測ったことにはならない。数学の受験問題や模擬試験問題を作成する側の人達は、数学の試験は「数学の学力」を測定するものであり、「単位時間内に決まりきった計算を速く正確にたくさん行うこと」を測定するものではないことを忘れないで欲しい。

２．

　上記の安田氏の本の第６８ページに問題１の拡張として次の問題２が与えられている。

問題２．$0 < x \leq y \leq z$ かつ $xyz + 1 = xy + yz + zx + x + y + z$ を満たすすべての整数解を求めよ。

　安田氏のその本に、問題２の解答が解答例１の方法で書かれている。しかし、問題２の正解を解答例２の方法でも与えることができる。

　生徒・学生は教わった解法を覚えて使うのではなく、自由な発想で各人の見出した方法で解答を与えて欲しい。それが数学の勉強になる。

　解答例１の方法は、少し変形した他の不定方程式にも適用できることが、容易に分かる。この点はよい点である。