４次多項式の判別式

Discriminant of the general polynomial of degree 4

畑田　一幸　（Hatada Kazuyuki）
岐阜大学教育学部数学教室
〒501-1193 岐阜県岐阜市柳戸１－１

筆者の、論文[1] ４次方程式の初等的解法（岐阜大学教育学部研究報告、教育実践研究、第７巻、 pp.65-68）の方法によって、一般４次式の判別式とその分解３次式の判別式が一致することを証明する。筆者の[1]で示した一般４次方程式の解法がオイラーの解法とも全く異なることも示す。

１．

係数体 K の標数は０または（５以上）とする。まず、前の論文から必要な結果を記す。
A, B, C, D を相異なる文字とし、
$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = (x^2 + px + q)(x^2 + rx + s)$ の p, q, r, s を A, B, C, D を用いて表す。

$$p^6 - 3Ap^5 + (3A^2 + 2B)p^4 - A(A^2 + 4B)p^3$$
$$+ (2A^2B + AC + B^2 - 4D)p^2 - A(AC + B^2 - 4D)p - A^2D + ABC - C^2 = 0$$

p はこの６次方程式の根として決定する。しかも p として、この６次方程式の任意の根がとれる。この p によって　$q = \dfrac{C - p(B + p^2 - Ap)}{A - 2p}$，　$r = A - p,$　$s = \dfrac{D}{q}$
は決定する。

特に、上記の６次方程式で $A = 0$ のときを考えると、それは

$$p^6 + 2Bp^4 + (B^2 - 4D)p^2 - C^2 = 0$$

となり、 p^2 に関する３次方程式になる。

$x = y - \dfrac{A}{4}$ とおく。次式を得る。

$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = y^4 + by^2 + cy + d$　　with

$b = -\dfrac{3}{8}A^2 + B,$

$c=\frac{1}{8}A^3-\frac{1}{2}AB+C$ and

$d=\frac{-3}{256}A^4+\frac{1}{16}A^2B-\frac{1}{4}AC+D.$

方程式 $u^6+2bu^4+(b^2-4d)u^2-c^2=0$ の解を u で表す。$v=\frac{c-u(b+u^2)}{-2u}$ とおく。$u'=-u,\ \ v'=\frac{d}{v}$ とおく。方程式 $y^2+uy+v=0$ の解を α,β とし、方程式 $y^2+u'y+v'=0$ の解を γ,δ とする。上述の結果より、

$$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=(x-(\alpha-\frac{1}{4}A))(x-(\beta-\frac{1}{4}A))(x-(\gamma-\frac{1}{4}A))(x-(\delta-\frac{1}{4}A))$$

と因数分解される。

さて、 y の多項式 $f(y)=y^4+by^2+cy+d$ の根を $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ と書く。

Z の多項式 $Z^3+2bZ^2+(b^2-4d)Z-c^2$ の根を ξ_1,ξ_2,ξ_3 と書く。

多項式 $Z^3+2bZ^2+(b^2-4d)Z-c^2$ を $f(y)=y^4+by^2+cy+d$ の分解３次式と呼ぶ。

A,B,C,D は相異なる文字なので、ξ_1,ξ_2,ξ_3 は K 上で代数的に独立である。筆者の[1]で、 $\{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}=\{(\alpha+\beta)^2,\ (\alpha+\gamma)^2,\ (\alpha+\delta)^2\}$ が得られている。

４次多項式 $f(y)$ の根と係数の関係により、$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$ が成立する。

$Z^3+2bZ^2+(b^2-4d)Z-c^2$ の判別式は、定義によって

$(\xi_1-\xi_2)^2(\xi_2-\xi_3)^2(\xi_3-\xi_1)^2$ である。

$f(y)=y^4+by^2+cy+d$ の判別式は、定義によって

$(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2(\beta-\gamma)^2(\beta-\delta)^2(\gamma-\delta)^2$ である。

$$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=(x-(\alpha-\frac{1}{4}A))(x-(\beta-\frac{1}{4}A))(x-(\gamma-\frac{1}{4}A))(x-(\delta-\frac{1}{4}A))$$

より、$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D$ の判別式は、定義によって

$$((\alpha-\frac{1}{4}A)-(\beta-\frac{1}{4}A))^2((\alpha-\frac{1}{4}A)-(\gamma-\frac{1}{4}A))^2((\alpha-\frac{1}{4}A)-(\delta-\frac{1}{4}A))^2$$
$$\times((\beta-\frac{1}{4}A)-(\gamma-\frac{1}{4}A))^2((\beta-\frac{1}{4}A)-(\delta-\frac{1}{4}A))^2((\gamma-\frac{1}{4}A)-(\delta-\frac{1}{4}A))^2$$

である。これは $f(y)$ の判別式に等しい。

ところで、$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$ を用いて

$$
\begin{aligned}
&(\xi_1-\xi_2)^2(\xi_2-\xi_3)^2(\xi_3-\xi_1)^2\\
&=((\alpha+\beta)^2-(\alpha+\gamma)^2)^2((\alpha+\gamma)^2-(\alpha+\delta)^2)^2((\alpha+\delta)^2-(\alpha+\beta)^2)^2\\
&=((2\alpha+\beta+\gamma)(\beta-\gamma)(2\alpha+\gamma+\delta)(\gamma-\delta)(2\alpha+\beta+\delta)(\delta-\beta))^2\\
&=((\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)(\alpha-\gamma)(\delta-\beta))^2\\
&=((\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\gamma-\delta))^2
\end{aligned}
$$

を得る。

　ゆえに、筆者の論文[1]に書いた方法により次の命題１が得られた。

命題１。４次式 $x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D$ の判別式は、その分解３次式 $Z^3+2bZ^2+(b^2-4d)Z-c^2$ の判別式に等しい。ここで

$$b=-\frac{3}{8}A^2+B,$$

$$c=\frac{1}{8}A^3-\frac{1}{2}AB+C,$$

$$d=\frac{-3}{256}A^4+\frac{1}{16}A^2B-\frac{1}{4}AC+D$$

である。

注。この命題１は、一般４次式のガロワ群を用いた方法によって、van der Waerden [2] に与えられている。[1]に書いた、筆者の方法でも、この命題１が証明できることを示した点が、本論文の眼目である。

２.

　４次方程式のオイラーによる解法をオイラーに忠実に紹介する。これによって、筆者の[1]での解法が、オイラーのものとは全く異なることを示す。

係数体 K の標数は０または（５以上）とする。A,B,C,D を相異なる文字とし、x の多項式 $x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D$ を考える。$x=y-\frac{A}{4}$ とおく。$b=-\frac{3}{8}A^2+B,$ $c=\frac{1}{8}A^3-\frac{1}{2}AB+C,\quad d=\frac{-3}{256}A^4+\frac{1}{16}A^2B-\frac{1}{4}AC+D$　とおく。l,m,n を A,B,C,D,x とは異なっていて、しかも相異なる文字とする。多項式 $(l+m+n)^4+b(l+m+n)^2+c(l+m+n)+d$ を考察する。この多項式をオイラーは

$$(lm+mn+nl)(4(l^2+m^2+n^2)+2b)+(l+m+n)(8lmn+c)$$
$$+((l^2+m^2+n^2)^2+4(l^2m^2+m^2n^2+n^2l^2)+b(l^2+m^2+n^2)+d)$$

と変形する。次にオイラーはl,m,nを未知数と考えて、方程式
$(l+m+n)^4+b(l+m+n)^2+c(l+m+n)+d=0$の特殊解を一組求めようとする。
その十分条件として、上記の式より、オイラーは

$$\begin{cases} 4(l^2+m^2+n^2)+2b=0 \\ 8lmn+c=0 \\ 4(l^2m^2+m^2n^2+n^2l^2)=-((l^2+m^2+n^2)^2+b(l^2+m^2+n^2)+d) \end{cases}$$

を見つけた。次に３次方程式の根の公式を用いて、この十分条件より、オイラーは、l^2,m^2,n^2を求めた。それらのうちで、条件$8lmn+c=0$を満たすものをすべて求めた。そして、それらから$l+m+n$を求めると、４通りあることを示し、それら４通りを根号と４則演算で表した。オイラーは、このようにして４次方程式$y^4+by^2+cy+d=0$のすべての解、すなわち４次方程式
$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$のすべての解を求めた。

筆者は[1]で、方程式の未知数yを３個の未知数の和として表すこともしないし、オイラーの十分条件も全く考察しない。加えて、筆者は[1]で、４次方程式が成り立つ為の適切な十分条件を求めようとは全くしない。

筆者が[1]で与えた方法は、オイラーの方法とは全く別の方法であることを御理解して頂けたと思います。

参考文献

[1] K. Hatada, An elementary method to solve the general equation of degree 4,　Annual report of the faculty of education, Gifu university (Educational Research), vol. 7, (2005), pp.65-68.　(in Japanese)

[2] B. van der Waerden, Moderne Algebra, Zweite Verbesserte Auflage, Springer, Berlin, (1937).