数学教育における証明・定理・公理の扱い

How should we treat proofs, theorems and axioms in Mathematics education?

畑　田　一　幸
HATADA Kazuyuki
岐阜大学教育学部数学教室

今から38年程前の高等学校の数学の教科書（数学Ⅰ，大日本図書，昭和41年発行）には次の記述がありました。

「数学は筋道の立った厳正な学問である。特に幾何学はギリシア時代にその体系ができあがり，すべての学問の模範となってきた。そこで幾何学を例にとり，数学での推理の方法や形式を学ぶことにしよう。……幾何学では，ある事柄を，それよりも簡単な事柄に基いて説明していくのであるが，説明に用いる理由を，しだいに溯って考えていくと，いつかはその正しさは当然と認めねばならない事柄に達する。それが公理とよばれるものである。

幾何学は少数のいくつかの公理をもとにして，その上に全内容を組み立てるのである。……幾何学では，公理の全体（公理系）を一度決めたならばそれだけを根底とし，そのほかのことはいっさい認めないで推論を進め，他の事柄を導いていく。この手順が証明であり，証明された結果の重要なものを，まとまった形で述べたものが定理である。」

「用語の意味をはっきり定めることをその用語を定義するという。」

「点・直線などのように定義しないで用いる基本の用語を無定義用語という。」

（筆者注。１．現代数学では，点，直線も定義する。無定義用語としては，ϵ（所属という概念）がある。例：$x \epsilon y$（通常，これを「x は集合 y の元である」と読む。）

２．定義は，それによって定義されたものが存在することまでは，保証しない。その存在は，公理系から証明されねばならない。）

その教科書から，もう少し引用します。

「平面幾何学の公理系：

公理Ⅰ．　２点を通る直線は唯1つ存在する。

公理Ⅱの１．直線は，その上の１点によって２つの部分に分けられる。

公理Ⅱの２．直線 ℓ 上に２点A，Bがあるとき，ℓ 上の点は線分AB，線分ABの延長，線分BAの延長の３つの部分に分けられる。

公理Ⅲ．　平面はその上の１直線 ℓ によって２つの部分に分けられる。そして，同じ部分にある２点を結ぶ線分と ℓ とには共有点がなく，互いに異なる部分に有る２点を結ぶ線分は，ℓ と唯１点を共有する。

公理Ⅳ．　半直線OAを，運動によって，他の任意の半直線O'A'に移すことができる。かつ，このとき直線OAを縁とする半平面 α を，直線O'A'を縁とする半平面の任意のひとつ α' に移すことができる。そして，このようなどの運動でも

① 半直線OA上の点Pが半直線O'A'に移る点P'はPに対していつも唯１つ定まる。

② α 上の角AOBが α' 上に移る角A'O'B'は角AOBに対して，いつもただ１つ定まる。

公理Ⅴ．　直線外の１点を通り，その直線に平行な直線は唯１つある。

公理Ⅵ．　点Ａを端とする半直線上に１点Ｅを定めれば，この半直線上の任意の線分ABは，線分AEを単位として測ることができる。そして，その値は正の数である。逆にどの正の数に対しても，長さがその数に等しい線分ABは存在する。」

（筆者注。３．上記の公理系の各主張は，集合論のZermelo-Fraenkel公理系から，（平面・直線等を定義したうえで,）証明できる。

４．公理Ⅵに‘正の数’が現れるが，正の数の定義が与えられていない点，及びその存在証明が与えられていない点で，上記公理系は不充分である。

５．生徒を含む読者にとって，上記の公理系の内容はわかりやすくない。その原因は，その教科書で定義されていない単語がいくつか含まれているのが，ひとつの理由であろう。）

上述の説明によって，その当時の生徒は完全とは言えないにしても，公理とは何なのか，厳密な論理とは何なのか，知ることができました。

ところが現在使われている中学校と高等学校の数学の教科書では，証明とは何かについては明確な説明は殆ど有りません。例えば，「中学校数学２」（大日本図書）では，第109ページに「すでに正しいと認められたことがらをよりどころとして，あることがらが成り立つことをすじ道を立てて述べることを証明という」と，書かれているのみです。これは極めて主観的文学的表現であり，「証明」とは何であるか定義していません。「すでに正しいと認められたことがら」とは何なのか，そして，「すじ道を立てて述べる」とは如何なることなのか，意味が確定するように客観的に示す必要があります。「公理」という単語自体，現在使われている中学校と高等学校の数学の教科書に現れていないようです。

中学校・高等学校の数学で，公理を基にした論理展開は，以前に日本では長らく，幾何学（平面幾何と立体幾何）を題材として扱われ，それ以外の数学の分野（代数学や解析学等）では殆ど扱われませんでした。最近の高等学校の数学の教科書では，集合と命題論理を題材として，必要十分条件や有限集合の元の個数が扱われていますが，集合以外の分野の数学に集合と命題論理は充分に活用されていません。

生徒に数学を勉強させる目的としては，第一に，正しい前提から出発して厳密な正しい論理で結論を導くことを修得させること，第二に，数学・物理・科学技術に使われている計算技術を修得させることがあるでしょう。現今の高等学校の数学（例えば，微分積分と実数のところ）の扱いは，論理よりも理由までは問わぬ計算技術の修得に重点が置かれているようです。実数の性質を厳密に扱い証明し理解した上で，微積分を学習しなければ，生徒には何故そうなるのか理由が分からず自分のしている計算が本当に正しいのかの判断もできないし，完全には身につかないでしょうし，独力で更に発展させることもできないでしょう。生徒を自分で考えて正しい結果に至るようにすることが数学教育の大きな目標です。現在知られている結果を乗り越えて新しい結果に到達することが最終的には望まれています。その為の準備は，現在の中学校と高等学校で教えている数学に欠けています。もっと丁寧に本当の基本から生徒に教えることが必要です。

私の提案ですが，まず一般の集合を教え，その際Zermelo-Fraenkel公理系と選択公理の内容を正確に教える（ただし，後半の複雑な部分は簡単に触れる程度でもよいだろう）が一点です。次に命題演繹の基本規則を列挙して教えます。以上の準備の後，写像の定義を与えます。そして，自然数全体の集合 ω の主要な基本性質を証明付で与えます。次に有限集合の定義と有限集合の元の個数（$\epsilon\omega$）の定義を与えます。集合 ω に加法と乗法の定義が可能であることを証明し，（小さくない方の数から他方の数を引く）減法が定義可能なことを示します。次に，ω の拡張として有理数体の存在定理を与えます。その方法はHatada [1] の方向で行います。有理数の約分・通分についても，それらを定義として導入するのではなく，その有理数体の定理の系として約分・通分の法則を証明して示すことが重要です。次に，有理数体からZermelo-Fraenkel公理系を用いて実数体の定義及び存在証明を与え

ます。次に一般次元のユークリッド空間の定義及び存在証明を与えます。ユークリッド幾何学の図形とはユークリッド空間内の部分集合であると定義します。そこから，数や図形の性質の研究が始まることを教えます。

大学用の代数学，幾何学，解析学の教科書をいろいろ見ても，論理の出発点として集合論の公理系を与えているものはみつからず，「定理」，「命題」，「系」が書かれ，そして「証明」が書かれています。洋書も同じです。このスタイルでは，初級の読者に，証明とは何であるのか本当にはわからないでしょう。公理を重視した古代ギリシアの数学を見習い，数学書は書き方を変えた方がよいでしょう。幾つかの大学用の教科書中の証明に，誤りが含まれていますが，それらは教科書の著者が現代数学全体の公理系（即ち，Zermelo-Fraenkel公理系と選択公理）を一通り学んでいれば避けられたと思われます。公理系に基き正確に書かれた数学の教科書の出現を期待します。

現在の高校数学の教科書と大学入試問題における集合の扱いは，人工的で複雑な定義により与えられた集合や複数の部分集合の，包含関係を求めさせたり個数を計算させたり確率を計算させたりしています。本質的に分からない事を試行錯誤で研究させるのではなく，時間をかけて整理すれば必ず解ける，特殊で人工的に定義した集合がどうなっているのかを考えさせる問題が多いようです。それらが，本当に未知である問題と結び付いていれば考える価値があるのですが，人工的に定義した対象について計算させる型の（問の為の）問が多いようです。それらは，数学全体の基礎（出発点）として集合論を扱うという本来の主要な目的からずれています。単なる計算という作業で生徒を疲れさせるのではなく，考察すべき重要な問題の決定とそれらの解決に頭脳を向けさせるべきでしょう。

参考文献

[1] K. Hatada, On the reason why the product of two negative integers must be positive, In the volume "Geometry, Analysis and Mechanics" (edited by J. Rassias), World Scientific Pub., Singapore, New Jersey, London, pp.113-120, 1994.

[2] 畑田 一幸，「数学全体の論理構造」（2005年２月１日講演）のアブストラクト，平成16年度数学教育研究集録，岐阜県高等学校教育研究会数学部会，pp.111-112, 2005年３月.