総合的数学教育教材研究 I [1] [2]

中等教育における複数教科にまたがる分野の教材の作成のために[3]

竹内　茂

Research for Integrated Mathematics Education Matereal I

Shigeru Takeuchi
Department of Mathematics, Gifu University, Gifu 501-1193, Japan

(Received January 10, and revised February 13th, 2006)

Abstract

The purpose of this article is to give an example of an integrated matereal of mathematics education in secondary schools in Japan, where many teachers are worrying about what to prepare for their classes. The problems are caused mainly by the decreasing motivation for the study of math on the side of students [27]. In many senior high schools, especially those oriented to "prep school", preparatory school for college entrance exam, teachers cannot manage to prepare matereals for the integrated study. This is because the curriculum is so oriented that most of their students can afford to pass entrance exam for colleges. Now Japan being faced to the population decreasing era, we are forced to change the contents of entrance exam, which will inevitablly lead to the curriculum reform in high school math education and vice versa.

概要

本研究は中・高校における総合学習教育のための教材開発を目的として、教師に対して実践的な内容を提供するものである。内容的には中学校や高校で扱う図形・幾何分野の予備知識をかなりの程度必要としているが、教師の側で十分な準備を経れば中高の現場でも教材として、導入が可能なものであると信じる。総合学習が前回の学習指導要領で導入されて以来、進学校を中心として高校ではあまり本格的な取り組みが、進んで来なかったのが実情である []. その理由は言うまでもなく、大学入試が従来の教科の枠に縛られているために、自由な出題が出来ないので、その結果として、高校が従来型の入試シフトの教育体制を続けているためである。今後，少子化が進むに従って，入試も画一化を免れ，出題の自由度が増すものと予測されるので，高校における総合学習の進展と教科における，内容選択の自由度も増すことが期待される．従って，ここに取り上げているような教材も，指導の対象となる日が近いものと考えられる．具体的には，黄金比（または神聖比率）及び白銀比と呼ばれる代数的数（有理数の２次拡大体の元）に関する，いくつかの代数的・幾何学的内容を含んだ５コマ程度の講義内容である．但し，１コマ５０分の授業時間を想定している．高校生に話すときは，内容的に少し補足する必要上１．５倍程度，また中学生に話す時は，更に１．５倍程度時間をかけて，丁寧な説明が必要と考えられる．

---

[1] 本研究の一部は，岐阜長良川ロータリークラブ例会（平成１８年１月２１日）において著者自身によって紹介されている。

[2] キーワード: 黄金比、白銀比、総合学習、図形・幾何教育、数学科教員養成

[3] Key Words and Phrases: golden ratio, silver ratio, integrated education, geometry education, math teacher training

目 次

1　はじめに

黄金比については，世間でその名前が知られている反面，その正確な定義・意味を知っている学生は，数学専攻学生に限定しても非常に少ない [27]. そのことを示す統計的データをここで与えることは出来ないが，著者のこれまでの授業経験から言えることである. 因みに，１０年近く前のある大新聞のコラム記事に，黄金比に関する誤った解説が掲載されたことがある。執筆者は多分著名な建築家か、美術評論家であったように記憶しているが、問題はその人に黄金比に関して、誤った知識を提供した人がいることである。黄金比自体はギリシア以来二千数百年に渡って、世界各地に伝えられて広まった「数学的な概念＝ある特定の比率」であるが、色々な数量的な特殊値を何でもかでも、黄金比に結びつけるのは贔屓の引き倒しのようである。だが，ことほど左様に(正規の学校教育のカリキュラム以外の場で) 先入観に基づいて誤った情報が伝わっていく状況をまの当りにしているわけである. 筆者が今回テーマに態々取り上げたのも，そのような偏見を正したいと思ったからである. このことについては，次節で少し詳しく取り上げる.　ここでは、黄金比の数学史的研究の成果を展開することが目的ではないので、黄金比がどのような経緯を経て今日もてはやされるに至ったか、またそれが正当化される所以は何かを議論することはしない。その代わり、幾何学的な図形の中で、また場合によっては数列等の代数的・解析的分野で、それらが顔を出すことを取り上げ、そのことを数学教育の場でどのように、生かしていったらよいのかを考えていきたい。

2　黄金比と白銀比の混同

2.1　黄金の定義とその現れ方

黄金比については色々歴史的経緯を含めて文献が出ているし、最近ではウエブ上でも検索可能なので、ここではそれらを網羅はせず、参考文献にはそのうち、最近出た単行本で入手が容易なものを一つだけ [3] 挙げる事にするが、学生・生徒にインターネットも利用させつつ、色々な数学の知識の世界に触れさせることは、知的欲求を喚起して有益であろう。但し、単に知識としてのみではなく、日常的な生活の中にある数理現象を通して、数学的興味を喚起させるような工夫が必要である。先ず黄金分割の定義を，天下りに与えよう.

Definition 2.1 (黄金比または神聖比率) 整係数２次方程式 $x^2 \pm x - 1 = 0$ の正実数解 $x = \dfrac{\sqrt{5} \pm 1}{2}$ を「黄金比」または「神聖比率」という. それらを今 $\alpha < \beta$ とおけば，それらは $\alpha + 1 = \beta$,　$\alpha\beta = 1$ の関係式を満足し，その近似値は $\alpha = 0.618\cdots$, $\beta = 1.618\cdots$ である. それによって，α は特にフィボナッチ数列 $\{1, 1, 2, 3, \cdots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}, \cdots\}$ の極限であることが知られる.

さて，ここで代数的な定義は一先ずおくとして，図形との関わりを見てみよう．古典的によく知られているのは，正五角形との関わりである [1, 26]．尤もガウスによれば [5]，正五角形の作図法とある種の五次方程式との間に，密接な関係があることが知られているので，その意味ではこれから述べることも，代数的な定義と結びついている．図１のように一辺の長さが１の正五角形ＡＢＣＤＥを描く．今５本の対角線を全て描きいれて，相似な二等辺三角形を３種類とりだすことが出来る．図のように交点Ｆ, Ｇ, Ｈをとり，$CF = CG = x, FG = y$ とすれば、$AC = 1 + x$ となり、$\Delta ACD \sim \Delta DCF \sim \Delta CFG$ により、比例関係式 $x + 1 : 1 = 1 : x = x : (1 - x)$ を得、前述の２次方程式 $x^2 + x - 1 = 0$ を導くことが出来る。ここで、変数として $y = x + 1$ をとれば、y に関する二次方程式 $y^2 - y - 1 = 0$ を導くことが出来、どちらも黄金比と呼ばれているのは、それらが互いに逆数の関係 $(xy = 1)$ にあるからである。
紙数・時間数の関係でここでは詳述しないが、実際の授業では黄金比が色々な場面で出てくる事を、実際に体験出来るよう工夫が必要である。またそれによって、発見することの楽しみを数学の学習過程で見つけることが期待される。

2.2　ＪＩＳ規格用紙と、黄金比に関する誤解・混同

注意を喚起する必要があるのは、世間一般に通常流通している日本工業規格の事務・印刷用紙が、黄金比と関係あるとの世間一般の誤解である。そのような誤解が、具体的に何か不都合を招いていることは無いにしても、教育・文化の問題としては、決して好ましいことではないであろう。というのは、通常用いられているＡ４用紙にせよ、或いは以前（一昔前）日本で広範に流布していたＢ５乃至はＢ４用紙にせよ、教育現場で日常的に用いられているものであるから、その用紙としての規格がどうして決まったのかを、生徒たちに教えることは、教育上有意義であるだけでなく、社会的にも数学がどのような役割を果たしているか認知させる上で、格好の教材であろう。ここでは、ＪＩＳ指定の経緯などについて論評することが目的ではないので、単に数学的に含意されていること、またそれを教育の場でどう指導していくか、について述べてみたい。
（１）先ず現代のＩＴ化、グローバル化時代における規格の制定趣旨は、フランス革命以来のメートル法、十進法の普及が、更に一層進展しつつある過程と考えることが出来る。英米系諸国が依然ヤード・ポンド法や１２進法に拘り、グローバルスタンダードに抵抗しているのは、皮肉の限りではあるが。その中でも特に事務或いは印刷・出版のための用紙は、面積１平方メートルを基準にＡ系統の用紙規格が決められている。実際の使い勝手のよさという点で、半分に折って順次型番が大きくなっているのは、読者諸氏のご存知の通りである。即ち最初のＡ紙からｎ回（縦方向に）２等分した時できる用紙規格をＡｎと呼んでいるわけである ([18, 5])。
（２）次の問題は、最初のＡ（＝Ａ０）用紙の形が（数学的に）どのようにして決まるかである。二等分しても形が相似（面積比＝相似比＾2 = 2）のまま変わらないことは、相似概念を履修していれば、小学生（高学年）でも十分理解可能であろう。また面積比が相似比の自乗であることも、中学生の場合は変数を用いて一般化公式として、指導可能な範囲に属すると考えられる。さて、そうすると付録図に示すように、例えばA用紙（縦＝ｘ＞横＝ｙ）からＡ１用紙に移行するとき、縦横の関係は（縦＝ｙ＞横＝x/2）となる。相似関係を前提とすれば、相似比の関係は $x : y = y : x/2$ となり、求める方程式 $x^2 = 2y^2$ が得られる。比の値が問題であるから、$x2 : y^2 = 2 : 1$ または $x^2/y^2 = 2$ 従って、$x : y = \sqrt{2} : 1$ または $x/y = \sqrt{2}$ を得る。注意を喚起するために、一応近似値も与えて、黄金比 $\alpha = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.618\cdots$ とA用紙縦横比：$a = \sqrt{2} = 1.414\cdots$ を比較しておこう。因みに、値は相当異なる二つの無理数（有理数の２次拡大）ではあるが、両者は非常に似通った特性を備えている (値が近似しているのではない、念のため)。その意味で、広く両者が混同さ

れているとしても、故無きことではないだろう。以下２，３その特性を、取り上げてみよう。(i) 両者とも整係数二次方程式（特に有理整数環の単元を係数としている所謂 *monicpolynomial*）の解である。即ちそれぞれ αはx$^2 - x = 1, a$ は $x^{-}1 = 1$ の解である。

(ii)　その結果 αについては､x(x-1)=1､aについては､(x+1)(x-1)=1となり､αと$\alpha - 1$, また $a + 1$ と $a - 1$ はそれぞれ逆数の関係にあることである。数値的に言えば、前者は

$$\frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} 1.618 \cdots x 0.618 = 1$$

後者は

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1} 2.1414 \cdots \times 0.414 \cdots = 1$$

(iii)　二つの二次方程式はともに、$x^2 = 1$ に次ぐ最も簡単な方程式（の双璧）であり、単純な幾何学的（＝図形上の）意味を有する。前者は正五角形、後者は正四角形の対角線の中に現れる。因みに正三角形では（対角線は存在しないので、代わりに垂直二等分線に関係した数値として、有理２次拡大数 $\sqrt{3}$ が現れ、これは、次に述べるＢ紙と関係していて興味深い。最もＢ紙の規格の制定経緯をここで詳しく述べる時間的余裕はないが、Ａ紙の場合と同様数学的な意味だけ述べておこう。[4] [5]

（３）次に「正しい」Ｂ紙の意味であるが、コピー機或いはパソコンのＤＴＰ機能を、日常的に使用している人たちは、数学的な意味合いを多少は考えたことがあるかも知れない。用紙選択・拡大縮小機能が標準装備されている機種を使用していれば、用紙間で１４０％に拡大するとか、７０％に縮小することは、日常的に行っているはずである。これらの数値が数学的に何を意味するか、知らなくてもＡ４からＡ３に拡大したいときは１４０％を選び、逆の場合は７０％を選択すればよいとすぐに覚え、いつの間にかそれは単なる習慣と化してしまっているであろう。具体的な方法さえ分かれば、面倒な理由など考えないで、ブラックボックス的にマウスをクリックし、或いはキーボードでコマンドを叩き用を済ませてしまうのが一般であろう。前述の結果により、Ａ４とＡ３の相似比は $1 : \sqrt{2}$ であり、従って、拡大の場合は値は約 $1/1.4141 = 70$ %であり、逆数をとれば、縮小の時は約１４０％となる（有効桁数２桁として）。さてそこで、Ｂ紙とＡ紙の関係であるが、相似図形であることは、前述の議論から分かっていることである。、数学的結論から言えば、Ｂ紙の面積はＡ紙のそれの１．５倍になっており [18]、実際付録の図表を参照するなり、各自手元にある現物のＡ４、Ｂ４の用紙を計測すれば、多少の誤差はあるものの、面積比は２：３、相似比は $\sqrt{2} : \sqrt{3}$ であることが、容易に確かめられるであろう。このような数値的な関係は、中高の生徒には数学の実際的な効用として、十分説得力を持つものであろう。[6] [7]

---

[4] Ａｎ用紙、Ｂｎ用紙のサイズ別の呼称はＪＩＳによる公式なものであるが（少なくとも注釈無しに日本国内で通用する）[18, 5]、ここではＡ０、Ｂ０を単にＡ紙、Ｂ紙と数学的な定義として、本論文中で便宜的に使用している。

[5] 学校現場では、(Ａ紙はともかく) Ｂ紙の呼称について多少混乱があるようである。実際市販の模造紙は縦横788mmx1091mm であって、ＪＩＳ規格の正規のＢ０（またはＢ１）紙とは、厳密な数値から言えば関係の無い代物である。但し、特注すればともかく、ＪＩＳ規格でＢ０（Ｂ１）用紙を市販している例は、これまでのところないようである。、ここで取り上げている所謂Ｂ紙について、岐阜県以外 (従って標準語) では模造紙と呼ぶケースが多いが、これはＪＩＳ規格の正式用語 ([18]) である。岐阜近辺？でＢ紙と呼ばれるようになった経緯について、ここでは明らかに出来ないが、教育実習に出向いた学生がしばしば、当惑している事例を見聞する。余談であるが、筆者も岐阜で小中高と教育を受けてきて、その間ずっとＢ紙と呼んできた記憶がある。またＢ４規格用紙（所謂わら半紙）はその呼称が示すように、模造紙の呼称同様、日本古来の和紙にそのルーツを求める考えが一般的のようであるが、正式な規格はあくまでメートル法によって、規定されている。

[6] 市販のノートなどは、特に最近は多様なサイズのものが売られているようで、Ｂ５のものと思って測ってみると、縦横とも多少（１０～２０％程度）値が異なっていることがある。これらの規格が（Ｂ５と表示して市販されているわけではない）、ＪＩＳ規格で承認されるようになった経緯は不明である。

[7] 因みに foolscap(16x13inch（米）, 17x13.5inch（英））という、米英系規格の大判用紙があるが、これは黄金比とも白銀比（＝ＡＢ系統）とも（無関係な）異なった規格である。

以下当初の計画では、最近解決したと報じられているケプラー予想[1]の幾何教育への応用についても一章を設ける予定でいたが、制限紙数も尽きたので、次回[27]に回したい。そこで述べる予定であったのは、「ケプラー予想とヒルベルトの第十八問題」及び「細密充填問題と幾何教育」である。
本文中［ ］内の数字等で参考文献表の邦文／欧文参考文献番号を表す. 尚、インターネットの急速な普及と情報開示によって、各種資料・報告等はwebの各種サイトで検索可能になり、敢えて従来の刊行物で引用、参照することの意味が薄れて来たと考え、掲載を略記したものもある。

3　図表付録

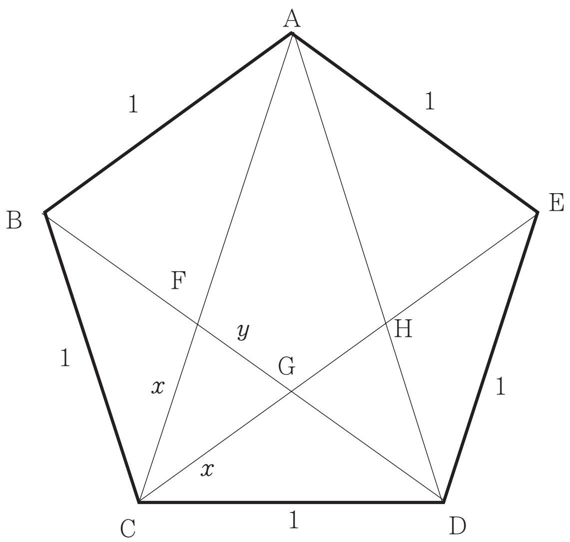

図　1

参考文献

[1] Szpiro,George G., "KEPLERS'S CONJECTURE How some of the Greatest Minds in History Helped Solve One of the Oldest Math Problems in the World", John Wiley Sons,Inc. 2003,（日本語訳：青木薫，ケプラー予想，新潮社，2005）.

[2] Rota,G.C., "DISCRETE THOUGHTS, Essays on Mathematics, Science and Philosophy", Birkhäuser, 1988,（日本語訳：竹内茂他，数学者の断想，森北出版，1995）.

[3] Mario Livio "The golden ratio, The story of Phi, the World's Most AStonishing Number"（邦訳：斉藤隆央）「黄金比はすべてを美しくするか？最も謎めいた「比率」をめぐる数学物語」, 早川書房(2005).

[4] 日本工業規格（工業化標準法）

[5] 国際標準化機構(ISO)

[6] 竹内茂、総合的数学教育教材研究Ⅱ-ケプラー予想の解決と幾何教育への応用（未定稿）-, 2006

[7] Burn,B.,Appleby,J.,Maher,P.(Eds), "Teaching Undergraduate 1Mathematics", Imperial College Press, London (1998)

[8] 岩井浩光、竹内茂、岐阜大学教育学部研究報告（教育実践研究）**3** (2001),pp.17-26.

[9] Julio,V.,Iwai,H.,Takeuchi,S.,Teachers Perception towards Cooperative Learning, Annual Report of the Faculty of Education, Gifu Univ. (Education Research) **2**(2000), pp.45-52.

[10] 高知県「平成１３年度教育世論調査」(2001)

[11] 亀山弘「組み紐と結び目」の教材化とその実践、岐阜大学大学院教育学研究科修士論文 (1998).

[12] 苅谷剛彦、日本の教育はどこに向かおうとしているのか？、科学 **70(10)** 岩波 (2000),pp.825-833.

[13] 私信、韓国の教員採用試験

[14] 松本幸夫、韓国の数学教科書、科学 **70(10)** 岩波 (2000),pp.872-877

[15] 文部省：平成 17 年度 我が国の文教施策, 2005.

[16] 中村陽介「アメリカの数学教育改革」岐阜大学教育学部数学教室、卒業研究、2005

[17] 安藤靖浩「イギリス数学教育事情」岐阜大学教育学部数学教室、卒業研究、2005

[18] 西森他「大学での数学の教え方いろいろ」日本数学会大学数学基礎教育ＷＧ報告 (2000)

[19] 岡部、戸瀬他「分数ができない大学生」東洋経済新報社 (1999)

[20] 陳華麗、中華人民共和国中高等学校数学教科書（和訳）1998、岐阜大学

[21] 岐阜数学教育内容・方法開発研究ＷＧ、平成１４年３月

[22] 竹内茂、岐阜大学教育学部数学科カリキュラム研究ー教育系大学における数学専門教育の目標・理念とその内容構成についてー（１）、岐阜大学教育学部研究報告 **19-1**(1994),pp.27-36.

[23] 竹内茂、数学教育国際協力研究（１）　アルゼンチンーその１、岐阜大学教育学部研究報告 **25-1**(2000),pp.1-13.

[24] 竹内茂、岐阜大学教育学部数学教育アンケート調査、未公刊 (2001)

[25] Formation continue et perfectionnement professionnel des enseignants, OECD, Paris(1998).

[26] Takeuchi,S., Curriculum Research, Math Department of Gifu Univ. -To consider the cooperation of the professors of Math-proper and Math-ed, Science Report of the Faculty of Education, Gifu Univ. **26**-1(2001),1-12.

[27] Takeuchi,S., International Cooperation in Mathematics Education -Argentine 1- (in Japanese), Sc. Rep. Fac. Educ., Gifu Univ. **25-1** (2000),1-13.

[28] Takeuchi,S., International Cooperation in Mathematics Education -Argentine 2- (in Japanese), Sc. Rep. Fac. Educ., Gifu Univ. **27-1** (2002),1-14.

[29] Shigeru Takeuchi: Math Ed and in/pre-service teacher training Proc.of the ICM2002 Satellite International Conference on math education, Tibet University, Lhasa, China, August 12-17, 2002, "Trends and challenges in mathematics education", East Normal University Press, Shanghai(2004),pp.377-383.

[30] Villalon,J., Iwai,H., Takeuchi, S., Teachers' Perception towards Cooperative Learning, Ann.Rep.Fac.Gifu Univ, (Educational Research),**2**(2000), 45-52.