岐阜大学教育学部研究報告　教育実践研究　第７巻（2005）

４次方程式の初等的解法

An elementary method to solve the general equation of degree４

畑　田　一　幸*

HATADA Kazuyuki

３次方程式の解法を既知とするならば，高等学校で学ぶ多項式の性質（未定係数法と因数分解）だけで，フェラリ（Ferrari）の技巧的方法を用いずに４次方程式が困難なしに解けることを示す。

１．

学生に次の順序で問題を与え，４次方程式の解の公式に到達させる。

問題１．$x^4-2x^3-25x^2+26x+120$ を因数分解せよ。

解答。$(x+2)(x-3)(x+4)(x-5)$．高等学校の数学の範囲で解答可能である。

問題２．x^4-3x^3-x+21 を因数分解せよ。

解答。有理数体上で $(x^2+2x+3)(x^2-5x+7)$．実数体上でも同じ。高等学校の数学の範囲で解答可能である。

問題３．$x^4-2x^3+2x^2-10x+1$ を因数分解せよ。

解答。有理数体上で既約である。実数体上で

$$\left(x^2+(\sqrt{3}-1)x+\sqrt{3}+2\right)\left(x^2-(\sqrt{3}+1)x+2-\sqrt{3}\right)$$
$$=\left(x^2+(\sqrt{3}-1)x+\sqrt{3}+2\right)\left(x-\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}-1}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(x+\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}-1}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)$$

と因数分解される。

これらの例題を解くことによって，４次多項式の根の公式が得られそうだという予測を持たせたい。即ち，これらを解かせてからつぎの問題を考えさせる。

導入。実数係数の４次方程式 $f(x)=0$ が実数解を持つとき $f(x)$ は実数係数の２次式の積で表せる。実数係数の４次方程式 $f(x)=0$ が虚数解を持つときも $f(x)$ は実数係数の２次式の積で表せる。これらは易しい練習問題である。定数でない複素数係数の多項式は複素数の根を持つ。よって実数係数の４次多項式を実数係数の２次式の積で表すことは可能である。それらの係数を代数的に求めることは可能かが問題になる。それが可能ならば，複素数係数の任意の４次多項式を２次式の積に表すことも可能になる。

よって次の問題を考察する。簡単にする為，多項式の係数体の標数は０または（５以上）とする。

主問題. A，B，C，D を文字とし，$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=(x^2+px+q)(x^2+rx+s)$ の p，q，r，s を A，B，C，D を用いて表せ。

これが解ければ，右辺の２次式の根を求めることにより，４次方程式の解の公式が得られる。

解答。右辺を展開すると，$x^4+(p+r)x^3+(pr+q+s)x^2+(ps+qr)x+qs$ となる。

＊　岐阜大学教育学部数学教室

$A=p+r$，$B=pr+q+s$，$C=ps+qr$，$D=qs$ を得る。ゆえに

$r=A-p$，$qs=D$．よって

$qB=p\,(A-p\,)q+q^2+D$，$qC=pD+q^2(A-p\,)$．

ここで D を消去すると $C=p\,(B+p^2-Ap\,)+Aq-2pq$ が得られて，

$q\,(A-2p\,)=C-p\,(B+p^2-Ap\,)$ を得る。これと $qB=p\,(A-p\,)q+q^2+D$ より q を消去する。

$D\,(A-2p\,)^2=(B-p\,(A-p\,))(A-2p\,)(C-p\,(B+p^2-Ap\,))-(C-p\,(B+p^2-Ap\,))^2$

を得る。これを p についてまとめると

$p^6-3Ap^5+(3A^2+2B\,)p^4-A\,(A^2+4B\,)p^3$

$\quad+(2A^2B+AC+B^2-4D\,)p^2-A\,(AC+B^2-4D\,)p-A^2D+ABC-C^2=0$

を得る。p はこの６次方程式の解として決定する。

この p によって，$q=\dfrac{C-p\,(B+p^2-Ap\,)}{A-2p}$，$r=A-p$，$s=\dfrac{D}{q}$ は決定する。

特に，上記の６次方程式で $A=0$ のときを考える。それは

$$p^6+2Bp^4+(B^2-4D\,)p^2-C^2=0$$

となり，p^2 に関する３次方程式になる。係数体の標数が２でも３でもなければ，よく知られた３次方程式の解の公式（最初の発見者はタルタリア（Tartaglia）であり, それはカルダノ（Cardano）が著者の本 “Ars Magna” に書かれていると聞いている）を用いて，pをB，C，D と巾根と四則演算で表すことができる。

以下では，係数体の標数は２でもないし３でもないとする。$x=y-\dfrac{A}{4}$ とおく。次の等式を得る。

$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=y^4+by^2+cy+d$　with

$b=-\dfrac{3}{8}A^2+B$，

$c=\dfrac{1}{8}A^3-\dfrac{1}{2}AB+C$　and

$d=\dfrac{-3}{256}A^4+\dfrac{1}{16}A^2B-\dfrac{1}{4}AC+D$.

方程式 $u^6+2bu^4+(b^2-4d\,)u^2-c^2=0$ の解を u で表す。$v=\dfrac{c-u\,(b+u^2)}{-2u}$ とおく。

$u'=-u$，$v'=\dfrac{d}{v}$ とおく。方程式 $y^2+uy+v=0$ の解を α，β とし，方程式

$y^2+u'y+v'=0$ の解を γ，δ とする。上述の結果より，

$$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=\left(x-\left(\alpha-\frac{1}{4}A\right)\right)\left(x-\left(\beta-\frac{1}{4}A\right)\right)\left(x-\left(\gamma-\frac{1}{4}A\right)\right)\left(x-\left(\delta-\frac{1}{4}A\right)\right)$$

と因数分解されて主問題は解決する。

２．

上記の結果を用いて４次方程式の解の公式を導こう。上記と同じ記法を用いる。

$f(y)=y^4+by^2+cy+d$　の根を　α，β，γ，δ　と書く。$Z^3+2bZ^2+(b^2-4d\,)Z-c^2$　の根を　ξ_1，ξ_2，ξ_3　とすると，

$\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\} = \{(\alpha+\beta)^2, (\alpha+\gamma)^2, (\alpha+\delta)^2\}$ を得る。$f(y)$ の根と係数の関係により，$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$ が成立する。$f(-\alpha)=f(\alpha)-2c\alpha=-2c\alpha$ より，$(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)=-c$ を得る。よって

$$\begin{cases} \alpha+\beta=\sqrt{\xi_1}\,,\ \gamma+\delta=-\sqrt{\xi_1} \\ \alpha+\gamma=\sqrt{\xi_2}\,,\ \beta+\delta=-\sqrt{\xi_2} \\ \alpha+\delta=\sqrt{\xi_3}=\dfrac{-c}{\sqrt{\xi_1}\sqrt{\xi_2}}\,,\ \beta+\gamma=-\sqrt{\xi_3}=\dfrac{c}{\sqrt{\xi_1}\sqrt{\xi_2}} \end{cases}$$

を得る。これらより

$$\begin{cases} 2\alpha=\sqrt{\xi_1}+\sqrt{\xi_2}+\sqrt{\xi_3} \\ 2\beta=\sqrt{\xi_1}-\sqrt{\xi_2}-\sqrt{\xi_3} \\ 2\gamma=-\sqrt{\xi_1}+\sqrt{\xi_2}-\sqrt{\xi_3} \\ 2\delta=-\sqrt{\xi_1}-\sqrt{\xi_2}+\sqrt{\xi_3} \end{cases}$$

を得る。ゆえに，$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D$ の根は

$$\begin{cases} \left(\sqrt{\xi_1}+\sqrt{\xi_2}+\sqrt{\xi_3}\right)/2-A/4 \\ \left(\sqrt{\xi_1}-\sqrt{\xi_2}-\sqrt{\xi_3}\right)/2-A/4 \\ \left(-\sqrt{\xi_1}+\sqrt{\xi_2}-\sqrt{\xi_3}\right)/2-A/4 \\ \left(-\sqrt{\xi_1}-\sqrt{\xi_2}+\sqrt{\xi_3}\right)/2-A/4 \end{cases}$$

で与えられることが分かった。もちろんこの表示はよく知られている（例えば［２］を参照)。

３．

多くの本に引用されているフェラーリ（Ferrari）の解法を復習してみよう。

$f(y)=y^4+by^2+cy+d$ の根を求める。

$$\begin{aligned} f(y)&=y^4+by^2+cy+d \\ &=y^4+2ty^2+t^2+(b-2t)y^2+cy+d-t^2 \\ &=(y^2+t)^2+(b-2t)\left(y^2+\frac{c}{b-2t}y+\frac{d-t^2}{b-2t}\right) \end{aligned}$$

が有理式として成立する。

次に t を $\left(\dfrac{c}{b-2t}\right)^2-4\left(\dfrac{d-t^2}{b-2t}\right)=0$ が成り立つように特殊化する。すなわち t を３次方程式

$c^2-4(d-t^2)(b-2t)=0$ の解とする。そうすると

$y^2+\dfrac{c}{b-2t}y+\dfrac{d-t^2}{b-2t}=\left(y+\dfrac{c}{2(b-2t)}\right)^2$ となり

$$f(y)=\left(y^2+t+\sqrt{-b+2t}\left(y+\frac{c}{2(b-2t)}\right)\right)\left(y^2+t-\sqrt{-b+2t}\left(y+\frac{c}{2(b-2t)}\right)\right)$$

が得られ，２次方程式の解を求めることに帰着させることができる。

第１節に述べた解法とこのフェラーリの解法は異なることがわかる。第１節に述べた解法は未定係数法を用いているが，フェラーリの解法は未定係数法を使わない。

（このフェラーリの解法もカルダノの本 “Ars Magna” に最初に書かれたと聞いています。）

注意.　　私は第１節に書いた方法を，独自に得た。フェラーリのものとは異なっているので新しい解法を得たのかと思った。その後文献をいくつか調べたところ，矢ヶ部巌「数Ⅲ方式ガロアの理論」，現代数学社，1979年６月出版の第92ページに，

「デカルトは $x^4+px^2+qx+r=0$ を解くのに，因数分解

$$(x^2+kx+l)(x^2-kx+m)=x^4+(l+m-k^2)x^2+k(m-l)x+lm$$

を利用した。」

と書いてあるのを見つけた。しかし，その本には，デカルト（R. Descartes）の解法は，それ以上は，全く紹介されていない。

それで，第１節に書いた解法の優先権はデカルト（R. Descartes）にあるのだろうと思う。

しかし，私は一般の方程式 $x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$ を扱った点と，最終的に４次方程式の解の公式まで導いた点で，（デカルトの原論文は見ていないけれども，）デカルトの原論文の内容が，上記の第１節と第２節の内容をすっかりカバーしているとも思えないのです。

私は，本論文で４次方程式の解法が特殊な技巧に頼らずに，未定係数法の考え方で自然に得られることを示した。

なお，文献［２］ではガロワ理論による方程式の扱いが書かれている。

一般４次方程式のガロワ群を用いて，第１節の内容に説明を与えることも可能である。

参考文献（References）

［１］ G. Birkhoff and S. Maclane, A Survey of Modern Algebra, The 3rd edition, Macmillan, USA, 1965.

［２］ B. van der Waerden, Moderne Algebra, Zweite Verbesserte Auflage, Springer, Berlin, 1937.